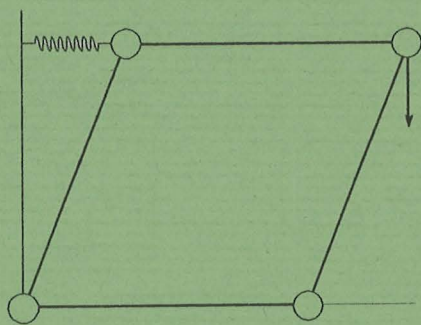


APUNTES DE FÍSICA

SISTEMAS MATERIALES Y GEOMETRÍA DE MASAS

por
ISABEL MÁS ROBLEDO

DESARROLLADOS SOBRE LAS LECCIONES TEÓRICAS
IMPARTIDAS POR EL CATEDRÁTICO
FÉLIX SORIANO SANTANDREU



CUADERNOS DE APOYO
A LA DOCENCIA DEL
INSTITUTO JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA DE
MADRID

Cuaderno 24
ISBN: 84-89977-25-9
Deósito Legal: M-18675-1998

APUNTES DE FÍSICA

SISTEMAS MATERIALES Y GEOMETRÍA DE MASAS

MECÁNICA DE SISTEMAS MATERIALES

12.1	GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA	1
12.2	FUERZAS EXTERIORES E INTERIORES A UN SISTEMA MATERIAL	2
12.3	ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN LOS SISTEMAS	3
12.4	EXTENSIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES A LOS SISTEMAS	5
12.4.1	TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	5
12.4.2	TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO	5
12.4.3	TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA	6
12.5	REDUCCIÓN DEL MOVIMIENTO AL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA	7
12.6	APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES AL C.D.M.	8
12.6.1	TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO	8
12.6.2	TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO	9
12.6.3	TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA	10

CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO DE LOS SISTEMAS

13.1	PLANTEAMIENTOS ALTERNATIVOS PARA SU ESTUDIO	11
13.2	ECUACIONES MECÁNICAS DEL EQUILIBRIO	12
13.3	CONCEPTOS DE MECÁNICA ANALÍTICA	14
13.4	PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES	17
13.4.1	CONFIGURACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE LAS COORDENADAS LIBRES	19
13.4.2	CONFIGURACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE	21
13.5	ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO	23

GEOMETRÍA DE MASAS

14.1	OBTENCIÓN DEL C.D.M. o C.D.G. DEL SÓLIDO. TEOREMAS DE GULDIN	24
14.2	INERCIAS MATERIAL A GIRO Y TRASLACIÓN	26
14.3	MOMENTO DE INERCIAS RESPECTO A UN EJE DE DIRECCIÓN VARIABLE	26
14.4	MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIAS EN EJES DE REFERENCIA	27
14.5	TEOREMAS DE STEINER RELATIVOS A MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIAS	30
14.6	ELIPSOIDE ASOCIADO AL TENSOR DE INERCIAS	31
14.7	ANALOGÍAS PARA SISTEMAS PLANOS	33

MECÁNICA DE LOS SISTEMAS

12.1 GRADOS DE LIBERTAD DEL SISTEMA.

Dado que las posibilidades de movimiento o **GRADOS DE LIBERTAD** de un punto material podían expresarse mediante el n° de coordenadas independientes o parámetros geométricos en general q_i (cartesianas, cilíndricas, esféricas...) que determinaban de modo unívoco su situación (3 para el punto libre en el espacio geométrico ordinario o 2 en el plano), el n° de grados de libertad ' s ' de un sistema material representará el n° de posibilidades de movimiento libre del mismo y por tanto el n° estricto de parámetros q_s que tendríamos que definir para conocer en todo instante su posición. Luego, un sistema formado por n puntos libres tendrá obviamente $s_{max}=3n$ grados de libertad y, en consecuencia, $3n$ incógnitas para definirlo en su totalidad.

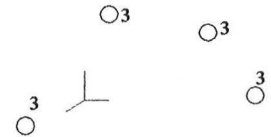
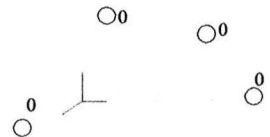
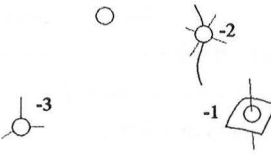
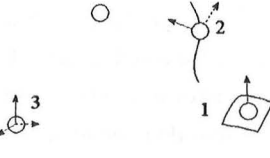
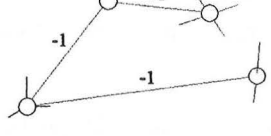
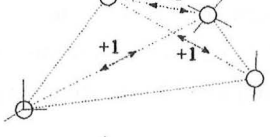
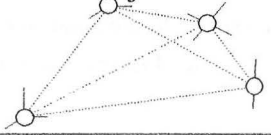
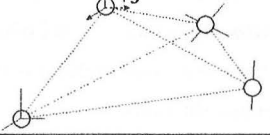
Si las posibilidades de movimiento del sistema quedan restringidas por la condición de que alguno de los puntos permanezca fijo, siga una trayectoria definida o solo pueda desplazarse por una determinada superficie, sus grados de libertad disminuirán en función de las **LIGADURAS EXTERNAS** correspondientes que, como veíamos para el punto material, serán simples, dobles o triples según el n° de grados de libertad que hagan desaparecer.

La anulación de n grados de libertad por **ligaduras** equivale a la presencia de n **Coacciones**, expresables **analíticamente** mediante igual número de **ecuaciones de entorno** o mediante su equivalente **mecánico**, las denominadas **fuerzas de reacción**, definidas como pasivas al no producir por sí solas movimiento sino oponerse al mismo en una determinada dirección.

Pero, por tratarse de un sistema material, podrán darse además entre partículas ciertas **LIGADURAS INTERNAS** o **VÍNCULOS** estableciéndose entre los parámetros implicados una determinada relación expresable **analíticamente** mediante **ecuaciones de enlace** entre parámetros q_i que responderá, por lo general, a consideraciones geométricas ordinarias de forma finita $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0$ (no necesariamente lineales), si bien en algunos casos entrarán en juego otras consideraciones que solo admitirán la expresión diferencial.

Si la distancia entre dos partículas permanece invariable, condicionará igualmente en número la disminución de un grado de libertad del sistema, por lo que se entenderán también como **Coacciones**, cuyo equivalente **mecánico** tendrían que ser **fuerzas pasivas de reacción**, -al menos por similitud, aunque de naturaleza diferente a las del exterior- al no producir por sí solas movimiento pero oponerse al movimiento relativo entre las dos. Sin embargo, si la distancia varía pero está sujeta a una determinada condición que, bajo determinadas circunstancias, puedan anular otro grado de libertad, su equivalente mecánico serán **fuerzas activas de reacción** mientras no impidan el movimiento relativo, pero también de naturaleza diferente ya que no existirán por sí solas, sino como respuesta a una sollicitación exterior.

En cualquier caso, éstas fuerzas tendrán las mismas características que veíamos en el estudio de la partícula, lo que supondrá, por tanto, la introducción de tantas incógnitas como disminución reales o potenciales de grados de libertad. Es decir, las coacciones representan una disminución de los grados de libertad en función de las limitaciones al movimiento que originan, pero se traducen, mediante planteamientos mecánicos, en otras tantas nuevas incógnitas de reacción. De este modo, si se fija la posición de uno de los puntos del sistema mediante tres coacciones, como desaparecen 3 incógnitas de posición le corresponderán tres incógnitas de reacción. A su vez, si se fija la distancia de un segundo punto al primero mediante otra coacción que le dejase libertad de movimiento en cualquier dirección salvo en la recta de unión con aquél desaparecería otro grado de libertad pero, a cambio, aparecería otra incógnita de reacción., como podemos ver en el ejemplo siguiente.

Grados de Libertad del Sistema Material	Parámetros de posición	Coacciones - Inoógnitas de reacción
 $3 \times 4 = 12$	12	 0
 $12 - 6 = 6$	6	 6
 $6 - 3 = 3$	3	 9
 $3 - 3 = 0$	0	 12
 $0 - 3 = -3$	0	 15

La posibilidad de movimiento de un sistema material estará pues condicionado a los grados de libertad "disponibles" y solo podrá decirse que se encontrará en equilibrio independientemente de las fuerzas que actúen sobre él cuando no le quede ninguno por agotar.

12.2 FUERZAS EXTERIORES E INTERIORES A UN SISTEMA MATERIAL.

En la Mecánica del punto nos hemos limitado a introducir el equivalente de las ligaduras, "mecánico" (reacciones) o "analítico" (ecuaciones a cumplir por las coordenadas del punto), sin plantearnos en ningún momento su propia naturaleza material. Es decir, hemos admitido que las ligaduras pueden modificar e incluso anular el movimiento de la partícula sometida a determinadas acciones exteriores, pero sin tener en cuenta o, más exactamente, suponiendo despreciable el efecto dinámico que la partícula pudiera ejercer sobre la ligadura en cuestión. En otras palabras, hemos supuesto las ligaduras móviles como inmateriales y las inmóviles como de masa muchísimo mayor que la de las propias partículas de forma que, en ningún caso, sus efectos pudieran modificar sensiblemente las ecuaciones de movimiento o de equilibrio del punto material.

Sin embargo, cuando las fuerzas directamente aplicadas sobre las partículas materiales **-acciones-** puedan modificar indirectamente el estado de movimiento o reposo de otras partículas, en contacto con ellas o ligadas mediante algún vínculo que las pueda relacionar, será necesario introducir en el estudio precisamente los efectos entre partículas **-coacciones-** que analíticamente podrán expresarse mediante determinadas ecuaciones de enlace entre las coordenadas de los puntos del sistema material mientras que su equivalente mecánico será un par de fuerzas (iguales y opuestas) interiores al sistema y con la misma recta de acción.

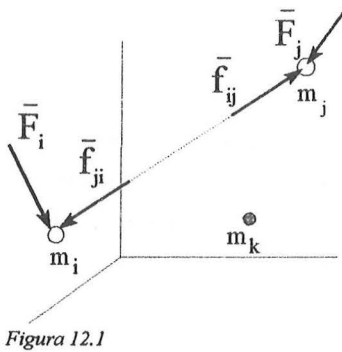


Figura 12.1

En efecto, a toda fuerza producida por la acción de un punto material sobre otro corresponde, por el PRINCIPIO de ACCIÓN Y REACCIÓN, otra de igual magnitud y sentido opuesto que la equilibra como reacción del segundo sobre el anterior por lo que, en respuesta a las que están actuando desde el exterior e independientemente de la naturaleza del vínculo, las coacciones tendrán como equivalente mecánico un nuevo tipo de fuerzas $\vec{f}_{ij}$ que denominaremos FUERZAS INTERIORES por tener su igual y opuesta $\vec{f}_{ji}$ dentro del propio sistema, diferenciándose así de las FUERZAS EXTERIORES, tanto acciones como reacciones, cuya pareja se encuentra siempre fuera del sistema material.

Pero, a fin de relacionar *causa* y *efecto* en un sistema, tenemos que recordar la diferenciación que en Cinemática establecíamos entre sistemas:

DISCRETOS	cundo puedan suponerse constituidos por un número finito de partículas o puntos materiales (que no ocupan volumen), no porque realmente lo sean sino porque su estudio permita establecer dicha simplificación
CONTINUOS	cundo, macroscópicamente hablando, llenen un volumen de materia -aunque microscópicamente puedan encontrarse huecos, comunicados o no- lo que equivale a suponer el sistema formado por un número infinito de partículas de masa diferencial

ya que, obviamente, para estudiar estos últimos necesitamos partir de alguna aproximación válida que nos posibilite su resolución. Por este motivo, atendiendo a la naturaleza de los vínculos entre partículas distinguiremos, a su vez, entre sistemas:

INDEFORMABLES	cundo la distancia entre cualesquiera dos puntos del sistema sea invariable, conservando siempre la misma forma (y por extensión el volumen, en el caso de los sistemas continuos)
DEFORMABLES	cundo no cumpla lo anterior, es decir, cuando pueda darse el movimiento relativo de unas partículas del sistema respecto a unos ejes solidarios con el mismo, sean cuales fueren sus características y el tipo de deformabilidad

Apoyándonos en la teoría desarrollada para los vectores deslizantes, con las limitaciones que implicaba el que los vectores fueran aplicados en previsión de su deformabilidad, encontraremos -al estudiar el sólido rígido- la utilidad de poder trabajar con sistemas reducidos equivalentes y en particular con sistemas idénticos a uno dado, ya que tanto en el caso del movimiento como en el de equilibrio del sistema, vamos a identificar el sistema de los EFECTOS con el de las CAUSAS, aunque en realidad éste último esté compuesto por dos: el de las fuerzas exteriores $\vec{F}_{ext}$ y el de las interiores $\vec{f}_{int}$ cuya suma es el sistema total, determinando fácilmente las ecuaciones necesarias para el equilibrio o el movimiento de un sistema material.

12.3 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO EN LOS SISTEMAS.

Consideraremos, de momento, un sistema ideal constituido por n partículas materiales, en principio vinculadas entre sí de forma que los efectos de una sobre otra se van a manifestar mediante parejas de fuerzas interiores $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$. La aplicación del 2º Principio a cada partícula del sistema, agrupando todas las fuerzas exteriores y todas las interiores del sistema aplicadas en él, nos proporcionaría la ecuación vectorial necesaria para determinar si está en equilibrio o se mueve con una aceleración $\vec{a}_i$ respecto a un marco inercial:

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = m_i \vec{a}_i \quad [12.1]$$

pero como las fuerzas interiores son incógnitas que se generan por cada vínculo material, para resolver las n $\vec{a}_i$ que nos determinarían el comportamiento del sistema, sería necesario despejar las $(n-1)!$ $\vec{f}_{ij}$ introducidas, relacionándolas con las parejas actuantes sobre las restantes partículas del sistema, por lo que tendríamos que plantear el sistema de las n ecuaciones vectoriales relativas a cada una junto con las $(n-1)!$ ecuaciones de compatibilidad:

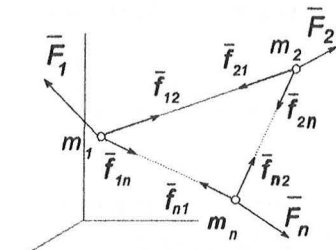


Figura 12.2

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{1j} &= m_1 \vec{a}_1 & \vec{f}_{1j} &= -\vec{f}_{j1} \\ \vec{F}_2 + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{2j} &= m_2 \vec{a}_2 & \vec{f}_{2j} &= -\vec{f}_{j2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{F}_n + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{nj} &= m_n \vec{a}_n & \vec{f}_{nj} &= -\vec{f}_{jn} \end{aligned} \quad [12.2]$$

pudiendo solo decirse que el sistema estará en equilibrio cuando todas y cada una de las partículas carezcan de aceleración y de velocidad.

El por qué de esta observación es inmediato ya que si sumamos las expresiones obtenidas para todo el sistema tendremos:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad \text{siendo} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \quad [12.3]$$

Sin embargo, el hecho de que también se anule la suma de las fuerzas exteriores, incluidas las posibles reacciones sobre las partículas del sistema ligadas al exterior, no garantiza por sí solo el equilibrio del sistema.



Figura 12.3

- En principio porque podría tratarse de sistemas sin otro tipo de vínculo entre partículas que el contacto mutuo en un instante determinado (choques) en el cual precisamente $\sum m_i \vec{a}_i = 0$ porque $\vec{a}_i = 0$

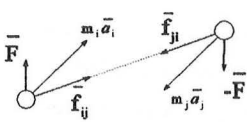


Figura 12.4

- Por otro lado, aunque $\sum \vec{F}_i = 0$, podría estar produciéndose un par; es decir un momento no nulo que originase un giro en el sistema de forma que las aceleraciones de unas partículas fueran opuestas a las de otras y, sin ser nulas, anulasen la suma de los productos por las respectivas masas $\sum m_i \vec{a}_i$.

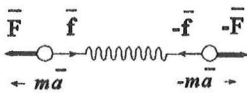


Figura 12.5

- Por último, aún siendo también nulo el momento de las fuerzas exteriores, podría producirse una deformación del sistema que, en el mejor de los casos, se estabilizaría al alcanzar las fuerzas interiores un valor capaz de equilibrar a las exteriores, restableciéndose total o parcialmente la distancia inicial al desaparecer la causa de la deformación, aunque en otras ocasiones podría llegar a originarse una más o menos rápida degeneración del vínculo hasta su desaparición.

En consecuencia, además de las ecuaciones anteriores, que se traducirán en la cantidad de movimiento del sistema, necesitamos recurrir a alguno de los dos procedimientos alternativos, como veíamos para el estudio del punto material: relacionando el momento de la cantidad de movimiento del sistema (momento cinético) con el momento resultante del sistema de fuerzas o bien, mediante procedimientos energéticos, relacionando el trabajo realizado por las fuerzas con la variación de la energía cinética total.

12.4 EXTENSIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES A LOS SISTEMAS

12.4.1 TEOREMA DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

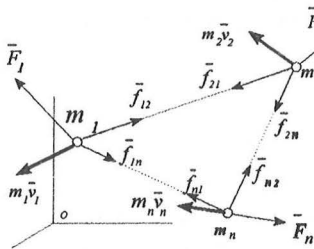


Figura 12.6

Sumando las ecuaciones de movimiento de cada una de las partículas del sistema teniendo en cuenta que las fuerzas interiores se anulan dos a dos, podemos hacer:

$$\sum \vec{F}_{ext} + \sum \sum \vec{f}_{int} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum (m_i \vec{v}_i) \quad [12.4]$$

relacionando directamente la resultante de las fuerzas exteriores al sistema material con la variación en el tiempo de la CANTIDAD DE MOVIMIENTO total.

En una primera interpretación del teorema se deduce que, *si existe alguna dirección $\vec{e}$ sobre la cual sean nulas o se anulen entre sí las proyecciones de las fuerzas exteriores, $\sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{e} = 0$, se conservará el ímpetu o cantidad de movimiento total del sistema según dicha dirección $\frac{d}{dt} \sum (m_i \vec{v}_i \cdot \vec{e}) = 0 \Rightarrow \sum m_i \vec{v}_i \cdot \vec{e} = cte$.*

En el límite, *si no actúan fuerzas exteriores o la resultante es nula $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, se conservará la cantidad total de movimiento del sistema $\sum m_i \vec{v}_i = \vec{c}$ en cualquier dirección* (por ejemplo en choques o explosiones).

12.4.2 TEOREMA DEL MOMENTO CINÉTICO

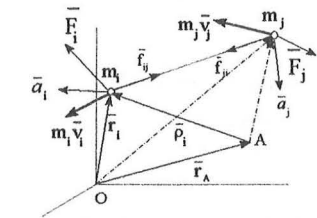


Figura 12.7

Como el momento de un vector respecto a un punto es independiente del punto de su recta de acción donde se considere aplicado (en eso se basa la teoría de vectores deslizantes), **el momento de las fuerzas interiores de un sistema respecto a cualquier punto (fijo o móvil) será siempre nulo** al ser el momento de $\vec{f}_{ij}$ igual y opuesto al de $\vec{f}_{ji}$ o bien, dicho de otro modo, al ser $\vec{\rho}_{ji}$ paralelo a $\vec{f}_{ij}$ en la expresión del momento respecto al punto considerado:

$$\vec{M}_A = \sum \vec{\rho}_i \times (\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij}) = \sum \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i + \sum \vec{\rho}_i \times \vec{f}_{ij} + \sum \vec{\rho}_j \times \vec{f}_{ji} = \vec{M}_A^{\vec{F}_{ext}} + \sum (\vec{\rho}_i - \vec{\rho}_j) \times \vec{f}_{ij} = \vec{M}_A^{\vec{F}_{ext}} + \sum \vec{\rho}_{ji} \times \vec{f}_{ij} = \vec{M}_A^{\vec{F}_{ext}}$$

Por tanto, podremos relacionar directamente el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto A:

$$\vec{M}_A = \sum \vec{\rho}_i \times (\vec{F}_i + \sum \vec{f}_{ij}) = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{\rho}_i \times \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} \quad [12.5]$$

con el momento cinético del sistema respecto a dicho punto, entendido como suma del de cada partícula, $\vec{\sigma}_A = \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i$, dado que al derivar nos queda:

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{\rho}_i \times \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{v}_i^{rel} \times m_i \vec{v}_i^{abs} + \vec{M}_A^{\vec{F}_{ext}} \quad [12.6]$$

siendo nulo el primer término de la última igualdad si A es un punto de velocidad nula en todo instante $\vec{v}_A = 0$ y $\vec{v}^{rel} = \vec{v}^{abs}$, lo que nos permitiría decir que *“la variación del momento cinético de un sistema respecto a un punto fijo es igual al momento, respecto a dicho punto, de las fuerzas exteriores (activas y pasivas) sobre el sistema material”* o, en otras palabras, que *“si el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto fijo es nulo se conserva el momento cinético del sistema”*:

$$\vec{M}_O^{\vec{F}_{ext}} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = cte \quad [12.7]$$

12.4.3

TEOREMA DE LA ENERGÍA CINÉTICA

A partir de la expresión del *Teorema de la Energía Cinética para el punto material*, por la cual el trabajo elemental realizado por las fuerzas aplicadas sobre un punto equivale a la variación de la energía cinética del mismo, se deduce que la variación de energía cinética de un sistema material será la suma de las variaciones correspondientes a todos los puntos que lo forman:

$$d\mathcal{E}_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \vec{a}_i \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = m_i d\vec{v}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = m_i d\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = m_i v_i dv_i = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] = dE_{c_i} \quad [12.8]$$

ya que la energía cinética $\frac{1}{2} m_i v_i^2$ es una magnitud aditiva escalar. Ahora bien, el trabajo total del sistema incluye, en principio, el realizado tanto por las fuerzas exteriores, como por las fuerzas interiores al sistema material, mientras no se demuestre que éste sea idénticamente nulo, como ocurre con la resultante de las propias fuerzas interiores $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = 0$ o con el momento resultante de cada pareja respecto a cualquier punto del espacio $\sum \vec{\rho}_i \times \vec{f}_{ij} + \sum \vec{\rho}_j \times \vec{f}_{ji} = 0$. En efecto, sumando el trabajo de cada pareja de fuerzas interiores obtendremos:

$$d\mathcal{E}^{int} = \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i - \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = \vec{f}_{ij} \cdot (d\vec{r}_i - d\vec{r}_j) = \vec{f}_{ij} \cdot d(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{\rho}_{ij} = -f d\rho \quad [12.9]$$

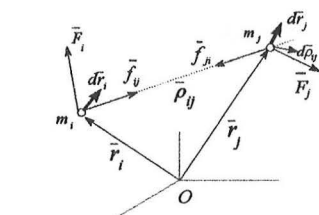


Figura 12.8

expresión que lo único que permite asegurar es que **el trabajo de las fuerzas interiores a un sistema material será, en principio, no nulo** $d\mathcal{E}^{int} \neq 0$, salvo que la distancia entre cada dos partículas se mantenga constante $d\rho = 0$ y por tanto $d\mathcal{E}^{int} = 0$ - *premisa en la que nos basaremos para estudiar el sólido rígido ideal*- en cuyo caso la variación de energía cinética del sistema será, *exclusivamente*, el trabajo elemental de las fuerzas exteriores al sistema $d\mathcal{E}^{ext} = dE_c$.

Si el sistema cuenta, a su vez, con **ligaduras lisas**, el trabajo de las fuerzas exteriores se limitará al de las fuerzas activas, ya que *las fuerzas pasivas correspondientes no producirán trabajo*, al anularse los desplazamientos permitidos por las ligaduras o ser ortogonales a ellas.

Por último, si además todas las fuerzas aplicadas al sistema derivan de un potencial se cumplirá, como vimos con el punto material $d\mathcal{E} = -dE_p$ y el trabajo total realizado por las fuerzas entre dos instantes dados será:

$$\mathcal{E}_1^2 = E_p^{(1)} - E_p^{(2)} = E_c^{(2)} - E_c^{(1)}$$

es decir, lo que se **gane** en **ENERGÍA CINÉTICA** se **perderá** en **ENERGÍA POTENCIAL** o viceversa.

En general, si hay deformación, será $d\mathcal{E}^{ext} + d\mathcal{E}^{int} = dE_c$ y, teniendo en cuenta que las fuerzas interiores al sistema serán respuesta a las fuerzas exteriores, si éstas tienden a separar o aproximar dos partículas, las fuerzas interiores originadas en la deformación tenderán a restablecer la configuración inicial; es decir, su trabajo se considerará negativo porque la fuerza generada en cada partícula será de sentido opuesto al de la deformación.

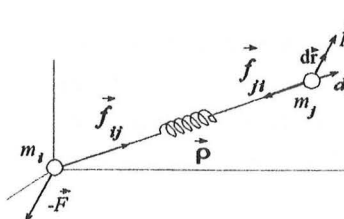


Figura 12.9

El tipo de deformación que más nos interesa, desde el punto de vista estructural, es el modelo **elástico** cuyos efectos se asemejan a los de un muelle por desaparecer totalmente al cesar la causa que produce la deformación. El valor de las fuerzas interiores originadas entre dos partículas materiales es, en estos casos, proporcional a la variación de la separación inicial ρ_o , lo que puede expresarse mediante un campo de fuerzas central -y como tal **conservativo**- de valor $f_{ij}(\rho) = k \Delta\rho = k(\rho - \rho_o)$ - **modelo lineal**- y sentido el de recuperación $\vec{f}_{ji} = -k(\rho - \rho_o)\vec{\rho}$ de forma que $d\mathcal{E}^{int} = -f d\rho = -dE_p^{int}$.

Esa energía potencial acumulada, positiva al ser negativo el trabajo realizado por las fuerzas interiores, revertirá íntegramente en energía cinética -en el modelo elástico- al cesar las causas que originan la deformación, restableciéndose la posición inicial. Por el contrario, en otros modelos no elásticos en los que se generan deformaciones remanentes aunque cese la causa que lo motivó, no podrá encontrarse una función potencial de la que derive el trabajo de las fuerzas interiores, de ahí que se denominen campos no conservativos al no conservarse la energía mecánica total.

12.5 REDUCCIÓN DEL MOVIMIENTO AL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA.

Si analizamos el segundo miembro en la expresión de la suma de fuerzas $\Sigma \vec{F}_i = \Sigma m_i \vec{a}_i$ y vamos transformando el orden de las sumas y las derivadas de los correspondientes vectores respecto de un marco inercial, teniendo en cuenta que las masas no varían con el tiempo, nos quedarían unas expresiones:

$$\begin{aligned}\Sigma m_i \vec{a}_i &= \Sigma m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \Sigma \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \Sigma m_i \vec{v}_i = \frac{d}{dt} M \vec{v}_C = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} \\ &= \Sigma m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \Sigma \frac{d^2}{dt^2} m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} \Sigma m_i \vec{r}_i = \frac{d^2}{dt^2} M \vec{r}_C = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2} = M \vec{a}_C\end{aligned}$$

que sugieren la idea de suponer concentrada toda la masa del sistema $\Sigma m_i = M$ en un punto teórico C, al que denominaremos CENTRO DE MASAS y cuya posición respecto del marco inercial vendría definida por:

$$\vec{r}_C = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{\Sigma m_i} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{\Sigma m_i} \quad [12.10]$$

de forma que, derivando, obtendríamos su velocidad y aceleración:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}_C}{dt} &= \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots + m_n \vec{v}_n}{\Sigma m_i} = \vec{v}_C \\ \frac{d\vec{v}_C}{dt} &= \frac{m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n}{\Sigma m_i} = \vec{a}_C\end{aligned} \quad [12.11]$$

lo cual equivale a decir que el punto en el que concentrásemos la masa del sistema se movería o (más propiamente dicho al tratarse de un punto) se TRASLADARÍA con una aceleración tal y como si estuvieran aplicadas todas las fuerzas del sistema en él: $\Sigma m_i \vec{a}_i = \vec{a}_C \Sigma m_i = M \vec{a}_C = \Sigma \vec{F}_i$

Ahora bien, a pesar de la similitud formal entre la expresión obtenida para el CENTRO DE MASAS de un sistema material y la que obtendríamos para el **Centro de Vectores Paralelos Aplicados**⁽¹⁾ de un sistema en el que los vectores fueran precisamente las acciones gravitatorias sobre las partículas del sistema -pesos- que vamos a denominar CENTRO DE GRAVEDAD, hay que tener presente que entre ambos existe una clara diferencia conceptual.

(1) El Centro de Gravedad se define como el punto del sistema material en el que podríamos imaginar aplicada la resultante de las fuerzas con que la Tierra atrae cada una de las partículas materiales que lo forman, dada su limitada extensión en comparación con las dimensiones de aquélla que permite considerarlas paralelas y todas a la misma distancia del Centro del campo para admitir cte. el valor de "g" que representa la intensidad de la gravedad en el ámbito en que se extiende el sistema. Estas simplificaciones permiten expresar el peso de cada una de las partículas en la forma $\vec{p}_i = -m_i g \vec{k}$ y, en consecuencia, $\vec{F}_G = \frac{\Sigma m_i g \vec{r}_i}{\Sigma m_i g} = \frac{\Sigma m_i \vec{r}_i}{\Sigma m_i} = \vec{r}_C$. Se trata, en definitiva, de conceptos diferentes aunque en el ámbito de nuestro estudio nos van a conducir a un mismo resultado formal. Para ello se considera igualmente despreciable la fuerza de inercia del movimiento de "arrastre" de la propia Tierra.

El **c.d.m.** se define como el punto (material o geométrico) que se movería con una velocidad y aceleración determinadas en dirección y sentido por la resultante de las fuerzas exteriores (activas y pasivas) como si estuviera aplicada en él $\sum \vec{F}_i = M \vec{a}_C$ y sin embargo no tiene por qué ser un punto del correspondiente eje central, mientras que el **c.d.g.** no solo es un punto del eje central de los pesos (exclusivamente) sino que es el único punto de dicho eje que no depende de la orientación, lo que nos será de gran utilidad en sistemas indeformables ya que en el transcurso del tiempo su posición relativa a los puntos del sistema no variará. Es decir, el punto en cuestión podrá coincidir siempre en el ámbito de nuestro estudio, pero los atributos de que va a gozar tendrán origen diverso según lo consideremos c.d.m. o c.d.g.

Desde este punto de vista parece más coherente utilizar el término centro de masas para sistemas de partículas -sobre todo si la distancia entre ellas no se va a mantener constante- y utilizar centro de gravedad para sistemas rígidos y el sólido en particular, ya que el objetivo en el primer caso será determinar el movimiento o reposo de cada una por separado mientras que en el segundo nos bastará con averiguar la rotación y la traslación únicas del sistema reduciéndolo por lo general al punto donde se supone aplicada la acción de la gravedad. Sin embargo sería más riguroso utilizar centro de masas para todo lo relacionado con los teoremas de la Mecánica ya que se desarrollan a partir de él y no del centro de gravedad, pudiendo encontrar multitud de ejemplos de movimiento que no derivan de su acción.

12.6 APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS FUNDAMENTALES AL C.D.M.

12.6.1

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Derivando la propia expresión que determina la posición del c.d.m. se deduce que:

$$M \vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i \Rightarrow M \vec{v}_C = \sum m_i \vec{v}_i \quad [12.12]$$

es decir, **la cantidad de movimiento de un sistema material es la misma que la que tendría su c.d.m. supuesta concentrada toda la masa del sistema en él**, por lo que, siendo

$$\sum \vec{F}_i = M \vec{a}_C = \frac{d}{dt} M \vec{v}_C = M \frac{d\vec{v}_C}{dt} \quad [12.13]$$

si existe alguna dirección sobre la se anulen las proyecciones de las fuerzas exteriores, $\sum \vec{F}_{ext} \cdot \vec{e} = 0$, se conservará la cantidad de movimiento del c.d.m. según dicha dirección y, **si no actúan fuerzas exteriores sobre el sistema o la resultante es nula** $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, se conservará la cantidad de movimiento total $M \vec{v}_C = c\vec{e} \Rightarrow \vec{v}_C = c\vec{e}$.

Es importante señalar que aunque la cantidad de movimiento sea la misma, el sistema no equivale a la masa total concentrada en el c.d.m., como muestra el hecho de que el momento cinético del sistema respecto a un punto, por ejemplo O, no sea el mismo que el de aquella, sino que haya que sumarle el del movimiento de las partículas del sistema relativo a C:

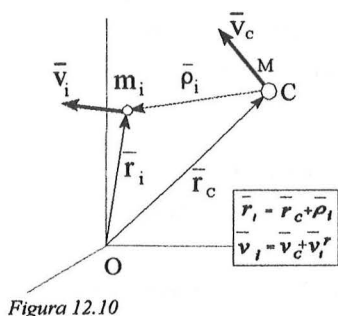


Figura 12.10

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum [\vec{r}_c + \vec{\rho}_i] \times m_i [\vec{v}_c + \vec{v}_i^r] = \\ &= \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{r}_c \times \sum m_i \vec{v}_i^r + \sum m_i \vec{\rho}_i \times \vec{v}_c + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^r = \\ &= \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \sum \vec{\rho}_i \times m_i \vec{v}_i^r = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{\sigma}_C^r \end{aligned}$$

donde se han anulado por sí solos los términos $\sum m_i \vec{v}_i^r = M \vec{v}_c^r = 0$ y $\sum m_i \vec{\rho}_i = M \vec{\rho}_c = 0$ al introducir el vector de posición y la velocidad del c.d.m. respecto a un sistema de referencia cuyo origen es el propio C resultando:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{r}_c \times M \vec{v}_c + \vec{\sigma}_C^r \quad [12.14]$$

12.6.2

MOMENTO CINÉTICO

Podemos relacionar directamente el momento de las fuerzas exteriores aplicadas al sistema (recordemos que las interiores no dan momento por anularse entre sí) respecto a un punto cualquiera A, fijo o móvil, con el momento cinético del sistema respecto a dicho punto utilizando como referencia el centro de masas ya que, al desarrollar la expresión general obtenida anteriormente, podemos hacer $\sum m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C$:

$$\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} = \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \vec{M}_A = \sum (\vec{v}_i - \vec{v}_A) \times m_i \vec{v}_i + \vec{M}_A = \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i - \vec{v}_A \times \sum m_i \vec{v}_i + \vec{M}_A = \vec{M}_A - \vec{v}_A \times M \vec{v}_C$$

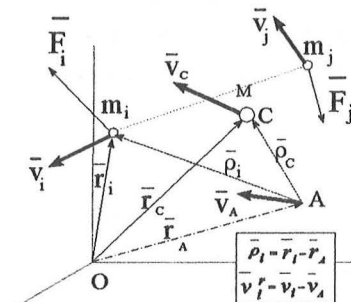


Figura 12.11

cumpléndose siempre que $\sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$ por tratarse de vectores paralelos, con lo que obtenemos la expresión:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{v}_A \times M \vec{v}_C \quad [12.15]$$

de donde se deduce que el momento de las fuerzas respecto a un punto A será únicamente igual a la derivada del momento cinético respecto a dicho punto cuando se trate del propio c.d.m. del sistema (fijo o móvil), su velocidad sea nula o sea paralela a la de aquél; es decir:

Si $V_A = 0$	A (fijo o variable)	$\vec{M}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \quad [12.16]$
Si $\vec{V}_A = \vec{V}_C$	A es el C.D.M. del sistema	
si $V_C = 0$	C fijo (o ante el sistema de fuerzas no se desplaza)	
Si $\vec{V}_A \parallel \vec{V}_C$	A sigue una trayectoria paralela a C	

Obviamente nos va a interesar trabajar con estos puntos particulares ya que no tendremos que “arrastrar” ese término adicional, pero todavía nos queda por ver otra propiedad que reforzará el interés de algunos y descartará o condicionará la utilidad de los demás: la posibilidad de referir el movimiento -y por tanto el momento cinético- a unos ejes ligados al propio punto A. Para ello, si expresamos la velocidad de cada partícula en función de la de arrastre de A y la relativa a dicho punto $\vec{v}_i = \vec{v}_A + \vec{v}_i^{(r)}$ y sustituimos en la expresión del momento cinético, teniendo en cuenta que $\sum m_i \vec{p}_i = M \vec{p}_C$, quedará:

$$\vec{\sigma}_A = \sum \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i \times m_i [\vec{v}_A + \vec{v}_i^{(r)}] = \sum m_i \vec{p}_i \times \vec{v}_A + \sum \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i^{(r)} = M \vec{p}_C \times \vec{v}_A + \vec{\sigma}_A^{(r)} = \vec{\sigma}_A^{(r)} + \vec{p}_C \times M \vec{v}_A$$

que puede interpretarse como la suma del momento de la **cantidad de movimiento relativo** a unos ejes solidarios con el punto A más el de la **cantidad del movimiento de arrastre** supuesta concentrada la masa del sistema en C de donde:

Si $v_A = 0$	punto fijo A = O o variable A = C.I.R. en un sistema rígido	$\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_A^{(r)} \quad [12.17]$
Si $\rho_C = 0$	A = C (C.D.M. del sistema, fijo o no)	

pudiendo descontar los primeros ya que el propio movimiento relativo sería el absoluto y utilizaríamos directamente la expresión obtenida con anterioridad. En cualquier caso, como lo que interesa es la derivada respecto al tiempo, para relacionar con el momento de las fuerzas, teniendo en cuenta nuevamente $\vec{v}_C^{(r)} = \vec{v}_C - \vec{v}_A$:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} &= \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_C}{dt} \times M \vec{v}_A + \vec{\rho}_C \times M \frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + \vec{v}_C^{(r)} \times M \vec{v}_A + \vec{\rho}_C \times M \vec{a}_A \\ &= \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + (\vec{v}_C - \vec{v}_A) \times M \vec{v}_A + \vec{\rho}_C \times M \vec{a}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + \vec{v}_C \times M \vec{v}_A + \vec{\rho}_C \times M \vec{a}_A\end{aligned}$$

y sustituyendo en la expresión general del teorema quedaría:

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + \vec{v}_C \times M \vec{v}_A + \vec{\rho}_C \times M \vec{a}_A + \vec{v}_A \times M \vec{v}_C = \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} + \vec{\rho}_C \times M \vec{a}_A \quad [12.18]$$

por lo que, aún tratándose de puntos de velocidad no nula, los únicos realmente interesantes **para reducir** el movimiento del sistema a un **movimiento relativo distinto del absoluto** son definitiva **los centros de masas** ya que, para anular el segundo término, el punto de reducción tendría que trasladarse con movimiento rectilíneo y uniforme, lo que no proporciona mayor utilidad:

Si $v_A \neq 0$ y $a_A = 0$	$A \equiv O$ (punto fijo o con mov. rectilíneo uniforme)	$\vec{M}_A = \frac{d\vec{\sigma}_A^{(r)}}{dt} \quad [12.19]$
Si $\rho_C = 0$	$A \equiv C$ (C.D.M. del sistema, fijo o no)	

12.6.3

ENERGÍA CINÉTICA

Independientemente del tipo de sistema de que se trate, es decir, de si trabajan o no las fuerzas interiores, y de si se va a conservar o no la energía total, la energía cinética del sistema podrá expresarse también refiriendo el movimiento de las partículas a un punto cualquiera A en la forma:

$$\begin{aligned}E_c &= \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i] = \sum \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_A + \vec{v}_i^r \cdot [\vec{v}_A + \vec{v}_i^r]] = \\ &= \sum \frac{1}{2} m_i [v_A^2 + 2\vec{v}_i^r \cdot \vec{v}_A + v_i^r]^2] = \sum \frac{1}{2} m_i v_A^2 + \sum m_i \vec{v}_i^r \cdot \vec{v}_A + \sum \frac{1}{2} m_i v_i^r]^2\end{aligned}$$

que, en el caso más general, quedará en la forma:

$$E_c = E_c^r + \frac{1}{2} M v_A^2 + M \vec{v}_c^r \cdot \vec{v}_A \quad [12.20]$$

donde el término $E_c^r = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^r]^2$ representa la **energía cinética de** las partículas en **su movimiento relativo** al punto A, el segundo término $E_c^a = \frac{1}{2} M v_A^2$ podría considerarse la **energía cinética de** las partículas en **su movimiento de arrastre** (todas con la velocidad de traslación del punto A) y $M \vec{v}_c^r \cdot \vec{v}_A$ será un término complementario que se anulará cuando el punto seleccionado sea el c.d.m. ya que, en tal caso $\vec{v}_c^r = 0$ por estar referido a unos ejes con origen el propio C:

$$E_c = E_c^r + \frac{1}{2} M v_c^2 \quad [12.21]$$

en resumen, **la energía cinética de un sistema material podrá expresarse como la que tiene en su movimiento relativo al c.d.m. más la que tendría dicho punto en su movimiento de arrastre supuesta concentrada toda la masa del sistema en él.**

CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO

13.1 PLANTEAMIENTOS ALTERNATIVOS PARA SU ESTUDIO.

Como recordaremos, se planteaban diversos mecanismos para la determinación del equilibrio de un punto material, siempre bajo la premisa de su **NO MOVIMIENTO** o variación de posición (es decir, desplazamiento nulo) respecto de un sistema referencial inercial. Así, cuando el punto material sometido a una serie de fuerzas $\vec{F}_i$ estaba ligado a una superficie $\varphi(x, y, z) = 0$, el análisis podía llevarse a cabo desde el punto de vista de:

LA ESTÁTICA CLÁSICA $\Rightarrow$ Considerando unas **fuerzas pasivas** (de reacción) en la dirección del movimiento que impiden, es decir, según la normal a la superficie, de forma que:

Sistema de Fuerzas nulo $\square$ en las posiciones de equilibrio, las fuerzas pasivas de reacción vienen a anular el sistema de fuerzas activas directamente aplicadas en el punto (concurrentes) $\vec{F}_i + \vec{N} = \vec{0}$

LA ESTÁTICA ANALÍTICA $\Rightarrow$ Mediante consideraciones **energéticas** "virtuales" o "reales" de las acciones (las reacciones no existen) sobre el punto material ligado a $\varphi(x, y, z) = 0$ de forma que:

Principio de los Trabajos Virtuales $\square$ el trabajo total ha de anularse $\delta\mathcal{E} = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r} = 0$ en el entorno de la posición de equilibrio para cualquier desplazamiento elemental que podamos imaginar (virtual) compatible con las ligaduras definidas por $\varphi(x, y, z) = 0$.

Teorema de Lejeune-Dirichlet $\square$ si las fuerzas derivan de un potencial $\vec{F}_i = -g\vec{\nabla}V$, la posición de equilibrio se corresponde con los extremos variacionales del potencial $dV = g\vec{\nabla}V \cdot d\vec{r} = 0$ que pueda adoptar entre los puntos de la superficie $\varphi(x, y, z) = 0$

La diferencia entre los respectivos planteamientos radicaba, en definitiva, en que la Mecánica Clásica lo hacía en términos de Fuerzas (vectorial) -introduciendo las fuerzas de reacción (pasivas) como expresión de las ligaduras- mientras que para la Analítica dichas fuerzas, por principio, no "existían" y se desarrollaba el cálculo exclusivamente en términos de trabajo (escalar) de las fuerzas activas (que no tienen por qué ser nulas) -expresando las ligaduras simplemente mediante el cumplimiento de la correspondiente expresión-. No obstante, dichos planteamientos se podían relacionar considerando ligaduras "lisas" ya que la reacción normal daría trabajo virtual nulo ante los únicos desplazamientos que el punto ligado podría realizar (tangentes a la superficie y por tanto perpendiculares a $\vec{N} \Rightarrow \vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0 \Rightarrow \delta\mathcal{E} = \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r} + \vec{N} \cdot \delta\vec{r} = 0$) y porque en los valores extremos de la función potencial la normal a la superficie equiescalar y a la de ligadura, al ser tangentes, coinciden en dirección $\vec{N} = \lambda g\vec{\nabla}\varphi$.

Buscaremos, por tanto, una generalización de esos mismos planteamientos para estudiar el equilibrio de los sistemas que implicará, necesariamente, el **NO MOVIMIENTO** de todas y cada una de las partículas que constituyan el sistema material y como la posibilidad de movimiento estaba condicionada a los **GRADOS DE LIBERTAD** "disponibles", nuestro objetivo será encontrar -por uno u otro método- LA CONFIGURACIÓN que adoptará el sistema **en función de las fuerzas y de los vínculos correspondientes**, para poder contrarrestar dichos grados de libertad, aunque para otro sistema de fuerzas no se alcance el equilibrio bajo la misma configuración.

En otras palabras, en este capítulo estudiaremos exclusivamente el equilibrio de sistemas con algún grado de libertad ya que solo podrá decirse que el sistema material se encontrará en equilibrio *independientemente de las fuerzas* que actúen sobre él cuando no le quede ninguno por agotar, que será objeto de estudio en otro capítulo.

En la Mecánica Clásica se abordarán los problemas relativos a la Estática de los sistemas y del sólido mediante la condición de nulidad del sistema de fuerzas exteriores (incluidas las de reacción) consideradas como sistema de vectores deslizantes ($\sum \vec{F} = 0$, $\sum \vec{M} = 0$), obteniendo a partir de dichas ecuaciones las incógnitas planteadas, siempre que no esté prevista la deformación.

Mediante procedimientos alternativos analíticos, sin embargo, se planteará la determinación del equilibrio a partir exclusivamente de las fuerzas activas, que son las que únicas que pueden originar la variación de posición (movimiento) aunque las ligaduras o vínculos sean las que "canalicen" o "modifiquen" la trayectoria que los puntos del sólido o del sistema vayan a seguir. Y como el elemento primordial de la Mecánica Analítica es que las cosas trabajan y para que una fuerza dé trabajo se necesita desplazamiento, en Estática lo que va a interesar es que el trabajo total de las fuerzas que actúan sobre el sistema se anule para que no se produzca dicho desplazamiento (ya que, en general, aquéllas no se van a anular) reduciéndose el problema a la resolución de expresiones analíticas procedentes de una magnitud escalar.

Aunque haremos un estudio más riguroso del equilibrio por el procedimiento analítico de los trabajos virtuales y llegaremos a una generalización del teorema de Lejeune-Dirichlet a partir de aquél, podríamos ya hacer extensivo lo indicado para el punto mediante una abstracción del sistema material reducido exclusivamente a los puntos sobre los que van a estar o van a poder considerarse aplicadas las fuerzas, sin tener en cuenta las interiores o de reacción (ya que simplemente no van a existir), pudiéndose reducir el planteamiento del equilibrio al estudio del trabajo total, con las limitaciones de movimiento impuestas por ligaduras y vínculos que suponen la pérdida de al menos un grado de libertad, expresable analíticamente mediante alguna condición.

13.2 ECUACIONES MECÁNICAS DEL EQUILIBRIO

Un sistema material *estará en equilibrio cuando todas y cada una de las partículas carezcan de aceleración y de velocidad* respecto de un marco inercial. Por tanto, a partir de las ecuaciones del equilibrio de las partículas del sistema:

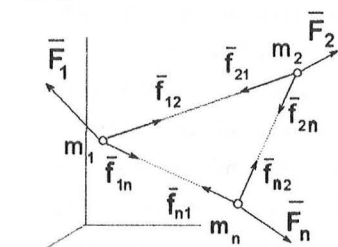


Figura 13.1

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{1j} &= m_1 \vec{a}_1 = 0 & \vec{f}_{1j} &= -\vec{f}_{j1} \\ \vec{F}_2 + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{2j} &= m_2 \vec{a}_2 = 0 & \vec{f}_{2j} &= -\vec{f}_{j2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vec{F}_n + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{nj} &= m_n \vec{a}_n = 0 & \vec{f}_{nj} &= -\vec{f}_{jn} \end{aligned} \quad [13.1]$$

como la resultante de las fuerzas interiores se anula, sumando todas las expresiones obtendremos que *-en el equilibrio-* la resultante de las fuerzas exteriores también se ha de anular:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i = 0 \quad \text{siendo} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad [13.2]$$

Asimismo, si $\vec{v}_i = 0$ también será $\vec{\sigma}_o = 0$ y $\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = 0$ por lo que, de la expresión correspondiente al teorema del momento cinético:

$$\frac{d\vec{\sigma}_o}{dt} = \frac{d}{dt} \sum [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times \frac{dm_i \vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{a}_i = \sum \vec{M}_A \quad [13.3]$$

se deduce que el momento de todas las fuerzas (exteriores e interiores) que actúan sobre cada partícula será $\sum \vec{M}_o = 0$ y como el de las fuerzas interiores de un sistema respecto a cualquier punto es siempre nulo:

$$\vec{M}_o^{\vec{f}_{int}} = \sum \vec{r}_i \times (\sum \vec{f}_{ij}) = \sum \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \sum (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = \sum \vec{\rho}_{ji} \times \vec{f}_{ij} = 0$$

también se tendrá que anular la suma de los momentos de las fuerzas exteriores, incluidas las posibles reacciones sobre las partículas del sistema ligadas al exterior $\vec{M}_o^{\vec{F}_{ext}} = 0$.

Es decir, en el equilibrio lo que buscamos es que el sistema de fuerzas (vectores) sea equivalente, o mejor dicho idéntico, al sistema nulo: es decir, **idénticamente nulo**. Pero si a un sistema de esas características le quitamos otro sistema nulo (que es el de las fuerzas interiores) lo que queda es un nuevo sistema nulo cuyas características son $\vec{R} = \vec{0}$ $\vec{M} = \vec{0}$, no importando el punto del espacio donde se tomen momentos ya que, aplicando la teoría de vectores deslizantes, si lo es en un punto lo será también en todos los demás.

Luego será **CONDICIÓN NECESARIA** para el equilibrio **que el sistema de las fuerzas exteriores que actúa sobre el sistema material sea nulo**. Sin embargo no podemos decir que sea suficiente pues lo realmente suficiente es que el conjunto de las n ecuaciones particularizadas a cada una de las n masas del sistema material sean nulas; es decir, que todos los puntos que forman el sistema estén en equilibrio y la condición anterior no implica el cumplimiento de ésta, sino simplemente que:

- si no actúan fuerzas exteriores o su resultante es nula $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, se conservará la cantidad total de movimiento del sistema $\sum m_i \vec{v}_i = \vec{c}$ en cualquier dirección, no garantizando que se anulen las $\vec{a}_i = 0$
- si el momento de las fuerzas exteriores respecto a un punto fijo es nulo $\vec{M}_o^{\vec{F}_{ext}} = \frac{d\vec{\alpha}_o}{dt} = 0$ se conserva el momento cinético del sistema: $\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = cte$ pero no garantiza que se anulen las $\vec{v}_i = 0$

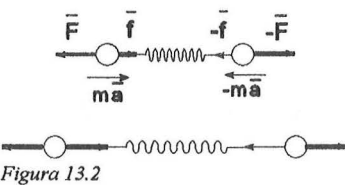


Figura 13.2

Por ejemplo, dos masas puntuales unidas por un resorte, ante unas fuerzas exteriores iguales y opuestas aplicadas en cada una de las masas, no alcanzarán el equilibrio mientras que la pareja de fuerzas interiores desarrolladas por el resorte proporcionalmente al alargamiento originado alcance el valor de las exteriores. Sin embargo ambos sistemas, el de las fuerzas interiores y el de las exteriores son nulos:

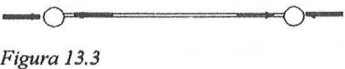


Figura 13.3

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} &= m_1 \vec{a}_1 & \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} &= m_2 \vec{a}_2 \\ \Leftrightarrow \vec{F}_1 &= -\vec{F}_2 & \Leftrightarrow m_1 \vec{a}_1 &= -m_2 \vec{a}_2 \neq 0 \end{aligned}$$

En cambio, las mismas masas de antes unidas por una barra rígida e inextensible siempre estarán en equilibrio sea cual sea el valor de las fuerzas exteriores, mientras sean iguales y opuestas, tengan la misma recta de acción (caso contrario originarían un par que haría girar el sistema como veremos en su momento) y no superen el límite de resistencia de la barra, obviamente.

En consecuencia, para sistemas total o parcialmente deformables la única forma de asegurar el equilibrio de todas las partes será estudiar aisladamente aquéllas cuya distancia relativa a las demás pueda variar de forma que las fuerzas interiores pasarán a ser exteriores a las partes aisladas, siendo necesario que cada punto esté en equilibrio para asegurar que el sistema lo está.

En el límite tendríamos que plantear las N ecuaciones vectoriales ($3N$ si expresamos las componentes cartesianas) que equilibrarían las N partículas del sistema $\sum \vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = 0$, incluyendo tanto las fuerzas activas como las pasivas de reacción de las ligaduras y las fuerzas interiores al sistema material, teniendo en cuenta que se introducen tantas incógnitas como coacciones que limitan los grados máximos de libertad. En cualquier caso, aunque el número de ecuaciones disponibles no puede ser mayor que $3N$, puede resultar una complicación su resolución si el sistema está formado por un número elevado de partículas y no admite simplificación.

Sin embargo, el problema surgirá realmente cuando el sistema cuente con más ligaduras de las necesarias para anular los $3n$ grados de libertad que tendría un sistema, como hemos podido ver en la lección anterior, ya que no dispondremos de ecuaciones suficientes para resolver todas las incógnitas generadas y tendremos que recurrir a otro nivel de análisis que contemple la constitución y resistencia del material.

Solamente en el caso de SISTEMAS RÍGIDOS (no deformables) podremos decir que SERÁ CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA EL EQUILIBRIO que el sistema de las fuerzas exteriores, incluidas las de reacción, constituya un sistema idénticamente nulo y, por tanto, que se cumpla:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{0}$$

ya que en tal caso las fuerzas exteriores podrán considerarse a todos los efectos como deslizantes aunque en realidad sean aplicados. Serán, por tanto, de aplicación todas las propiedades estudiadas para los sistemas de vectores deslizantes, pudiéndose igualmente reducir el sistema de las fuerzas activas a otro equivalente más sencillo que nos simplifique los cálculos y que podría ser la resultante situada en el eje central y un par equivalente al momento mínimo.

En este sentido recordemos, por ejemplo, que un sistema de vectores concurrentes da siempre momento nulo en el punto de concurrencia y sólo habría que plantear las ecuaciones correspondientes a la suma de fuerzas si fuera necesario determinar las incógnitas de reacción ya que las ecuaciones de momentos se traducen en consideraciones geométricas si se conocen las direcciones de algunas de las reacciones. Análogamente, si se trata de un sistema plano (coplanario) o de vectores paralelos, el momento mínimo será cero, como ya sabemos, y el sistema equivalente se reducirá a un solo vector situado en el E.C. lo que resulta de gran utilidad, al igual que los métodos gráficos estudiados para sistemas planos de los que encontraremos más de una aplicación.

13.3 CONCEPTOS DE MECÁNICA ANALÍTICA.

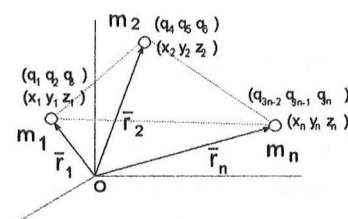


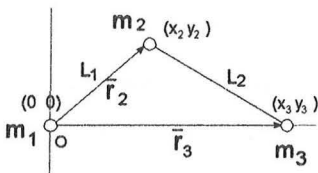
Figura 13.4

Dado que los **Grados de Libertad**, o posibilidades de movimiento de un punto material, venían caracterizados por un número $i \leq 3$ de parámetros geométricos independientes (coordenadas cartesianas x_i , cilíndricas o esféricas, $q_i \dots$) que determinaban de modo unívoco su posición, para un sistema formado por n puntos materiales $m_1, m_2, \dots, m_n$, el número máximo de grados de libertad $s_{max} = 3n$ representará el n° de posibilidades de movimiento del sistema libre y, por tanto, el n° de parámetros o **coordenadas** q_{3n} necesarias para definirlo en su totalidad que, al poder venir expresadas como ángulos, arcos, ... y no solo como distancias, denominaremos **COORDENADAS GENERALIZADAS** para no limitar su campo de aplicación.

Sin embargo, por el hecho de constituir un sistema material, van a poder establecerse entre dichas coordenadas determinadas relaciones derivadas de las **coacciones** o grados de libertad que anulan los vínculos correspondientes, expresables mediante un número equivalente de **ecuaciones de enlace** de forma que, junto con las condiciones de entorno que expresan las ligaduras con el exterior (ecuaciones de enlace con el exterior del sistema), supondrán un total de e coacciones y $s_{max} - e = s \leq 3n$ será el n° real de grados de libertad del sistema y, por tanto, el n° de parámetros independientes o **coordenadas libres** (de Lagrange), q_s , que determinarán la configuración de equilibrio de aquél.

En otras palabras, para la Mecánica Analítica **no van a "existir"** (mientras no den trabajo) **las fuerzas pasivas** (fuerzas interiores y de reacción exterior) a las que recurre la Mecánica Clásica como equivalente mecánico de las ligaduras, pero a cambio su **equivalente analítico** serán **las ecuaciones de enlace** y las condiciones de entorno por cada grado de libertad que se le quite al sistema material.

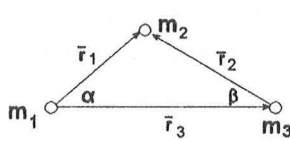
Las coordenadas generalizadas para un sistema material formado por n partículas pueden venir expresadas en su forma más habitual cartesiana, (x_i, y_i, z_i) $3i$ ($i=n$), independientemente del tipo de notación q_i ($i=3n$) si lo que representan son los mismos parámetros (variables). La diferencia radica en que la notación general abarca tanto distancias, como ángulos, arcos ... posibilitando la elección de otros parámetros que podrían simplificar su resolución. Por ejemplo, en un sistema plano de 3 puntos materiales, uno de ellos fijo m_1 (a b) y otro obligado a moverse sobre una recta que pasa constantemente por el primero y en el que la distancia entre m_1 y m_2 es L_1 y entre m_2 y m_3 es L_2 las ecuaciones de enlace expresadas en cartesianas con origen en el punto fijo serán:



$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(x_1, y_1) & x_1 &= 0 \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(x_2, y_2) & y_1 &= 0 \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_3(x_3, y_3) & y_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_2^2 + y_2^2 - y_1^2 &= L_1^2 \\ (x_3 - x_2)^2 + y_2^2 &= L_2^2 \end{aligned} \quad [13.6]$$

Figura 13.5

mientras que, eligiendo como parámetros los ángulos que ambas rectas forman con la que une los puntos extremos y la distancia entre éstos, en las ecuaciones de enlace no aparecerían los términos al cuadrado, pudiéndose expresar:



$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= [\rho_1, \alpha] & \rho_1 &= L_1 \\ \vec{r}_2 &= [\rho_2, \beta] & \rho_2 &= L_2 \\ \vec{r}_3 &= [\rho_3, \gamma] & \gamma &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} L_1 \sin \alpha &= L_2 \sin \beta \\ L_1 \cos \alpha + L_2 \cos \beta &= \rho_3 \end{aligned} \quad [13.7]$$

Figura 13.6

En general tendremos un sistema cualquiera idealizado como sistema de puntos materiales. Si no es muy complicado buscaremos las coordenadas libres que, supuestas fijas, coarten cualquier posibilidad de movimiento del sistema, pero si no se puede se elegirán unas coordenadas cualesquiera y se determinará el equilibrio con ayuda de las ecuaciones de enlace.

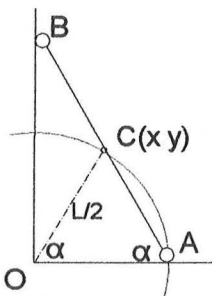


Figura 13.7

Así, en el ejemplo de la figura en el plano, siempre podríamos elegir como coordenadas las 4 de los puntos extremos A (x_A, y_A) y B (x_B, y_B) imponiendo las condiciones de entorno de dichos puntos $y_A=0, x_B=0$ y la ecuación de enlace definida por la condición de mantenerse siempre a una distancia cte. L , expresable por $(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = L^2$, lo que supone $s = 4 - 3 = 1$ grado de libertad. Pero resultaría algo incómodo si elegimos reducir el estudio al movimiento de su centro de masas, equidistante de ambas supuestas de igual valor, por lo que parecería más adecuado elegir como coordenadas las de C (x, y), estableciendo como ecuación de enlace su distancia fija al origen $x^2 + y^2 = (L/2)^2$. Aún así resultaría mejor elección la utilización de polares ya que $\rho_C = L/2$ y la coordenada libre que buscamos es precisamente el ángulo α que define su posición.

Por lo general, la relación entre las coordenadas generalizadas no libres (parámetros o variables *dependientes* ($q_1, q_2, \dots, q_{3n}$)) va a responder a consideraciones geométricas y será, por tanto, expresable analíticamente mediante **ecuaciones finitas** (o **diferenciales integrables**) de Enlace $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0$, denominándose en tal caso **ENLACES HOLÓNOMOS** para diferenciarlos de los **NO HOLÓNOMOS** o anholónomos, cuya ecuación resulta una **expresión diferencial de primer orden no integrable**, ni siquiera mediante la utilización de factores integrantes: $\varphi_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_1 + \varphi_2(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_2 + \dots + \varphi_{3n}(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_{3n} = 0$.

En efecto, aún siendo infrecuentes en nuestro ámbito de estudio, podremos encontrar determinados vínculos cuyas *coacciones* no respondan a distancias, ligaduras a superficies o a líneas, etc., por intervenir otros conceptos no geométricos como fuerzas pasivas de rozamiento, dilataciones térmicas, etc., para algunas de las cuales las ecuaciones de enlace entre parámetros q_i (no necesariamente lineales) solo podrán expresarse a nivel diferencial δq_i (desplazamientos virtuales en el caso de parámetros lineales).

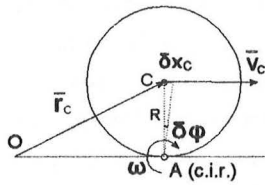


Figura 13.8

mientras que si rueda y desliza el c.i.r. ya no será el punto de contacto sino otro punto a distancia de C variable ya que la fuerza de rozamiento (no conservativa) disipará energía con lo cual la ecuación de enlace no será integrable y, por tanto, el enlace será No Holónimo.

Sin embargo eso no implica que las ecuaciones diferenciales estén siempre asociadas a enlaces No Holónomos ya que, en algunos casos, sí admitirán integración y, por tanto, serán enlaces Holónomos. Por ejemplo, la condición (coacción) de que un cilindro ruede sin deslizar tendrá como ecuación de enlace (para movimiento plano):

$$\delta x_C = R \delta \varphi \Rightarrow \int \Rightarrow x_C = R \varphi + C \Rightarrow \text{enlace Holónimo}$$

En general los enlaces no holónomos serán rugosos, interviniendo el deslizamiento (campos no conservativos) mientras que los holónomos serán lisos (conservativos) y son con los que fundamentalmente vamos a trabajar, ya que nos vamos a limitar en casi toda la Estática Analítica a ligaduras lisas.

Resumiendo, la anulación de n grados de libertad por un vínculo o ligadura equivale a la presencia de n coacciones, expresables mediante n ecuaciones de enlace, de forma que si uno de los puntos del sistema se fija, como desaparecen 3 incógnitas de posición (se fijan 3 parámetros = 3 coacciones) se eliminan 3 grados de libertad y le corresponden otras tantas ecuaciones de enlace de cada una de las coordenadas del punto con valores fijos del exterior (condiciones de entorno). Si se fija la distancia entre dos puntos móviles sólo se impone una coacción, aunque se implican dos puntos del sistema, relacionando las 6 coordenadas mediante una sola ecuación.

Queda claro, por tanto, que el término "enlace" se refiere más a las coordenadas de los puntos que al vínculo o ligadura de los puntos en sí, aunque obviamente están en relación. En cualquier caso, como el problema de la Estática es determinar la posición en el equilibrio de los puntos del sistema material con s grados de libertad, si se parte de coordenadas generalizadas no libres para expresar la posición de cada punto material:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, q_3) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_4, q_5, q_6) \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{r}_n &= \vec{r}_n(q_{3n-2}, q_{3n-1}, q_{3n}) \end{aligned} \quad [13.9]$$

el número de incógnitas será $3n > s$ y se necesitará un sistema de $3n$ ecuaciones para su resolución, de las cuales precisamente las ecuaciones de enlace nos van a proporcionar $e = 3n - s$:

$$\begin{aligned} \Phi_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \\ \Phi_2(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \\ \dots \dots \dots \\ \Phi_e(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \end{aligned} \quad [13.10]$$

Si, por el contrario, encontramos directamente s coordenadas libres que permitan expresar la posición en todo instante de todos los demás puntos del sistema en función de ellas:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_1(q_1, q_2, \dots, q_s) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_2(q_1, q_2, \dots, q_s) \\ &\dots \dots \dots \\ \vec{r}_n &= \vec{r}_n(q_1, q_2, \dots, q_s) \end{aligned} \quad [13.11]$$

al no existir relación entre las q_j ($j = 1 \rightarrow s$), por ser independientes, no admitirán ecuaciones de enlace y el problema se reducirá a la resolución de s ecuaciones con s incógnitas que nos proporcionarán el valor de las $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_s^0)$ en la **configuración de equilibrio**. El método ideal será pues, salvo que existan enlaces no holónomos, determinar las s coordenadas libres o de Lagrange.

13.4 PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

Recordando la definición de **trabajo virtual elemental de una fuerza** como el trabajo que realizaría dicha fuerza si el punto material sobre el que actúa se desplazase ligeramente de su posición inicial en cualquier dirección que pudiéramos imaginar (*desplazamiento virtual*):

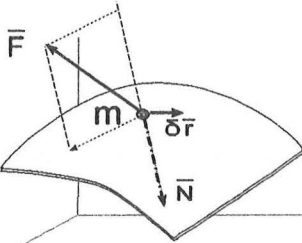


Figura 13.9

$$\delta \mathcal{E} = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \quad [13.12]$$

y la **condición de equilibrio del punto** obtenida analíticamente en el tema VIII mediante la anulación del trabajo total virtual realizado por todas las fuerzas aplicadas sobre él, aunque se reducía exclusivamente al de las fuerzas activas ya que se suponían, "por principio", ligaduras lisas ($\vec{f}_r = \vec{0}$) y completas, para desplazamientos compatibles con los enlaces (normales, por tanto, a las fuerzas pasivas $\vec{N}$)

$$\Rightarrow \vec{N} \cdot \delta \vec{r} = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{E} = \sum \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad [13.13]$$

si generalizamos a un sistema material m_i sobre el que actúa un sistema de fuerzas $\vec{F}_i$ (activas), en equilibrio cuando lo estén todos los puntos del sistema, parece lícito pensar que, *sometido también a ligaduras lisas y completas*, el trabajo total del sistema, suma de los trabajos virtuales de las todas las fuerzas actuantes sobre los puntos al sufrir un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$ de su posición inicial será también nulo:

$$\delta \mathcal{E} = \vec{F}_1 \cdot \delta \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \delta \vec{r}_2 + \dots + \vec{F}_n \cdot \delta \vec{r}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad [13.14]$$

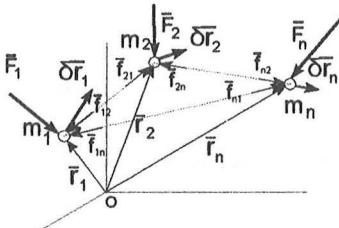


Figura 13.10

Ahora bien, la validez de esta expresión va a limitarse, *por principio*, a las premisas indicadas, no pudiendo constituir una generalización y por tanto un teorema como veremos a continuación. En efecto, si analizamos el equilibrio de uno de los puntos del sistema sobre el que pueden estar aplicadas tanto fuerzas exteriores, activas $\vec{F}_i$ o pasivas $\vec{N}_i$, como acciones $\sum \vec{f}_{ji}$ o reacciones vinculares internas $\sum \vec{n}_{ij}$ de otros puntos del sistema sobre él, el trabajo total realizado por las fuerzas sobre el punto sería:

$$\delta \mathcal{E}_i = (\vec{F}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ji} + \vec{N}_i + \sum_{j=1}^n \vec{n}_{ij}) \cdot \delta \vec{r}_i = \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \vec{n}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad [13.15]$$

con lo que, obtendríamos el trabajo total sumando directamente (por ser aditivo) el de los n puntos del sistema, quedando la expresión general:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \delta \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j + \sum_{i=1}^n \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{n}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \vec{n}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \quad [13.16]$$

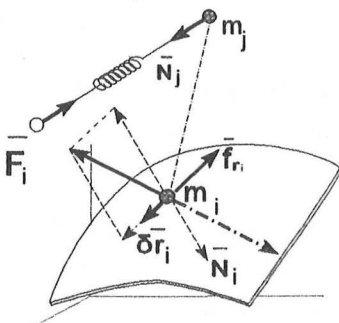


Figura 13.11

Solo si las ligaduras fueran totalmente **lisas y completas**, las fuerzas pasivas darían trabajo nulo para todo desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_i$:

$$\delta \mathcal{E}^{(pas)} = \sum_{i=1}^n \vec{N}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{n}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \vec{n}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j = 0$$

En efecto, sin son **lisas** $\vec{N} \perp \delta \vec{r}$ $\delta \mathcal{E}^{(pas)} \neq 0$, como veíamos en el caso del punto ligado a una superficie o a una línea, aunque se intuye que también es así para todos los tipos posibles de vinculación ya que no podemos generalizar por ser de aplicación a otros campos de la Física.

En tal caso, siempre y cuando las ligaduras sean además **completas**, es decir, bilaterales (pues de lo contrario obviamente no existirían fuerzas pasivas para desplazamientos incompatibles con los enlaces) e indeformables (o producirían trabajo negativo por deformación en el vínculo, como por ejemplo un resorte o un apoyo elástico, en cuyo caso se podría sustituir el vínculo por una fuerza activa equivalente sobre el sistema material) la expresión general se reduciría entonces al trabajo de las fuerzas activas exclusivamente:

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}^{(act)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j = 0 \quad [13.17]$$

a diferencia del caso general (real) en el que, por ser $\delta \mathcal{E}^{(pas)} \leq 0$, persistiría el equilibrio mientras no se agotase la resistencia al deslizamiento en todos los vínculos, aún cuando el trabajo de las fuerzas activas no fuera nulo, pudiendo expresarse el equilibrio mediante una desigualdad:

$$\delta \mathcal{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{E}^{(act)} = -\delta \mathcal{E}^{(pas)} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j \geq 0 \quad [13.18]$$

Por otro lado, los dos últimos sumandos de ambas expresiones, que representan el trabajo de cada pareja de fuerzas interiores $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$ como vimos en el tema 12, se podrían expresar por su valor:

$$\delta \mathcal{E}_{f_{ij}} + \delta \mathcal{E}_{f_{ji}} = \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i + \vec{f}_{ji} \cdot \delta \vec{r}_j = \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_i - \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{r}_j = \vec{f}_{ij} \cdot (\delta \vec{r}_i - \delta \vec{r}_j) = \vec{f}_{ij} \cdot \delta (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{\rho}_{ij} = -f_{ij} \delta \rho_{ij} \leq 0 \quad [13.19]$$

también ≤ 0 como el de las fuerzas pasivas, fuera cual fuese el sentido de las $\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$, de forma que, trasladado a la [13.18], nos daría la expresión completa del equilibrio para el caso general en forma de desigualdad:

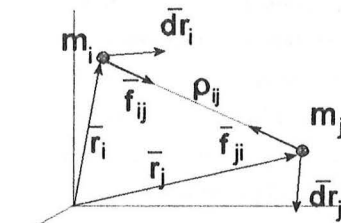


Figura 13.12

$$\delta \mathcal{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \mathcal{E}^{(act)} = -[\delta \mathcal{E}^{(pas)} + \delta \mathcal{E}^{(ij)}] = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i \geq 0 \quad [13.20]$$

mientras que trasladado a la [13.17] cuando el trabajo de las fuerzas pasivas era nulo, daría la igualdad:

$$= \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{\rho}_{ij} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \delta \rho_{ij} \quad [13.21]$$

que constituye la expresión general del denominado **PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES** por el cual:

... es condición necesaria y suficiente para el equilibrio de un sistema material sometido a ligaduras lisas y completas que sea nulo el trabajo virtual del sistema de fuerzas activas para todo conjunto de desplazamientos virtuales compatibles con los enlaces en el entorno de la configuración de equilibrio.

enunciado como Principio y no como Teorema (que sería la desigualdad anterior) precisamente por las premisas indicadas de ligaduras lisas y completas y desplazamientos compatibles con los enlaces, constituyendo el fundamento de todo razonamiento posterior basado en él.

La primera aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales será la **determinación de la configuración del equilibrio** en los casos en que $\delta \rho_{ij} = 0$, como ocurre con los sólidos y sistemas materiales rígidos e indeformables, o cuando las fuerzas interiores originadas por vínculos elásticos (activas) puedan ser "sustituidas" por fuerzas exteriores equivalentes, dado que el trabajo de las fuerzas interiores sería sistemáticamente nulo y, en consecuencia, la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas exteriores también:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{p}_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \delta \rho_{ij} \quad [13.22]$$

mientras que su aplicación a sólidos o sistemas ligeramente deformables, en los que $\delta \rho_{ij} \neq 0$, nos permitiría el **estudio de la deformación** (ver apéndice) al ser el trabajo realizado por las fuerzas exteriores igual y de signo opuesto al realizado por las fuerzas interiores al sistema material:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{p}_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \delta \rho_{ij} \quad [13.23]$$

de manera que, para deformaciones elásticas, es decir proporcionales a las fuerzas (conservativas), el trabajo de las fuerzas exteriores sería igual a la variación de energía potencial mientras que para fuerzas de otro tipo, (no conservativas o disipativas) se produciría una deformación no recuperable y ya no se podría hablar exclusivamente de energía potencial porque entraría en juego otro tipo de energía (por ej. térmica) disipada en la deformación.

En cualquier caso, la determinación de un trabajo podrá venir dado no solo una fuerza F , sino también por cualquier otra magnitud como un momento M , una presión p , un potencial eléctrico V ... es decir, por algo que no varía o fuerza generalizada (Q_i) y por una variación virtual de la coordenada generalizada asociada a ella (δq_i), pudiendo ser, respectivamente, un desplazamiento como hemos visto hasta ahora δp , un ángulo $\delta \phi$, un volumen δv o una carga eléctrica δQ . La expresión del trabajo virtual en tales casos se podría escribir:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E} &= M \delta \phi && (\text{Momento y variación de ángulo}) \\ \delta \mathcal{E} &= p \delta v && (\text{Presión y variación de volumen}) \\ \delta \mathcal{E} &= V \delta Q && (\text{Potencial eléctrico y variación de carga}) \end{aligned} \quad [13.24]$$

13.4.1 CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO MEDIANTE LAS COORDENADAS LIBRES.

Para la aplicación del *Principio de los Trabajos Virtuales* en la determinación de la configuración de equilibrio partiremos de un sistema de fuerzas $\vec{F}_i$ ($i=1,n$) **actuando** sobre n puntos de un sistema material, situado en un espacio geométrico ordinario, sometidos a un número e de **enlaces holónomos** (ligaduras lisas y completas) tales que su grado de libertad será $s=3n-e$, de forma que la c. n. y s. para el equilibrio será la anulación del trabajo total virtual realizado por las fuerzas activas para un desplazamiento virtual, compatible con los enlaces, de los puntos respectivos de aplicación.

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \cdot \delta \vec{p}_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \delta \rho_{ij} \quad [13.25]$$

Eso significa que, aunque elijamos en principio un sistema cartesiano para su definición, con $3n < s$ parámetros $((x_i, y_i, z_i))$, éstos, por lo general, no van a ser independientes, sino que van a estar ligados a los demás precisamente por las $m=3n-s$ ecuaciones de enlace $\phi_m(x_i, y_i, z_i) = 0$ de forma que los $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ también lo estarán. Es decir, el desplazamiento de uno de los puntos va a arrastrar a todos los demás, pudiéndose encontrar la relación entre ellos diferenciando las ecuaciones de enlace $\delta \phi_m = \sum \frac{\partial \phi_m}{\partial x_i} \delta x_i + \sum \frac{\partial \phi_m}{\partial y_i} \delta y_i + \sum \frac{\partial \phi_m}{\partial z_i} \delta z_i = 0$.

Por tanto, aunque la condición de equilibrio va a ser que el sistema no realice trabajo, es decir *que se anule la suma de los trabajos virtuales de todas las fuerzas aplicadas* sobre el sistema, para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales realizados en el entorno de las posiciones de equilibrio:

En efecto, como los $\delta q_j \neq 0$ porque partimos precisamente de esa premisa y las coordenadas q_j son independientes tenemos, en definitiva, un sistema de entes libres de tal manera que una combinación entre ellos no puede anularse salvo que se anulen los términos $Q_j = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$ que, por ocupar el lugar de las fuerzas en la expresión del trabajo, si las q_j son coordenadas generalizadas, reciben el nombre de fuerzas generalizadas (por ej., un momento, una presión, un potencial ... como hemos visto). Esto nos proporciona un sistema de s ecuaciones con s incógnitas cuya resolución nos determinará los valores de los parámetros independientes para la configuración de equilibrio:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 & q_1^o \\ Q_2 &= Q_2(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 & q_2^o \\ &\vdots & \vdots \\ Q_s &= Q_s(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0 & q_s^o \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [13.30]$$

siendo efectivamente condición necesaria y suficiente, como enunciaba el Principio de los Trabajos Virtuales la anulación del trabajo total del sistema para su determinación.

13.4.2 CONFIGURACIÓN DEL EQUILIBRIO MEDIANTE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

Como hemos visto, lo ideal es elegir unas coordenadas libres ($q_1, q_2, \dots, q_s^o$) para determinar la configuración del sistema en función de ellas, pero si no es fácil o posible encontrarlas, aunque el proceso sería similar habría que hacer intervenir las ecuaciones de enlace con un mayor protagonismo que en el caso anterior.

Partimos pues de $3n$ coordenadas dependientes ($q_1, q_2, \dots, q_{3n}$) con lo que la expresión del trabajo virtual elemental quedará en la forma $\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{3n} Q_j(q_1, q_2, \dots, q_j) \delta q_j = 0$, no sirviendo la solución trivial $Q_j = 0$ porque equivaldría a la anulación de las fuerzas aplicadas. Ahora bien, contamos con $3n$ ecuaciones pero sólo $s < 3n$ grados de libertad impuestos precisamente por las $m = 3n - s$ ecuaciones de enlace, de forma que si no tuviéramos esos vínculos los grados de libertad serían realmente $3n$ y podríamos anular las Q_j^* correspondientes. Y éste va a ser el recurso al que se va a acoger el método de Lagrange: "suprimir" los enlaces y sustituirlos por el efecto equivalente sobre el sistema material; en otras palabras, introducir el trabajo de las fuerzas pasivas como si fueran activas ya que por ser idénticamente nulo (tratándose de ligaduras lisas y completas) no va a modificar la condición de trabajo virtual nulo para todo conjunto de desplazamientos virtuales en el entorno de la posición de equilibrio.

Como las fuerzas pasivas tendrán la dirección y el sentido del movimiento que impiden, si las ecuaciones de enlace $\phi_m = \phi_m(q_1, q_2, \dots, q_{3n})$ son unas funciones de los parámetros que los puntos materiales implicados están obligados a cumplir, dichas fuerzas tendrán la dirección de sus gradientes $g\vec{r}ad \phi_m$ aunque no sabemos su valor, por lo que tendremos que introducir unos nuevos parámetros λ_m de forma que el trabajo de cada una de las fuerzas pasivas se podrá expresar como:

$$\delta \mathcal{E}_m = \lambda_m g\vec{r}ad \phi_m \cdot \delta \vec{r}_m = \lambda_m \delta \phi_m(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = \lambda_m \left[\frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \phi_m}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \phi_m}{\partial q_{3n}} \delta q_{3n} \right] = \sum_{j=1}^{3n} \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_j} \delta q_j \quad [13.31]$$

y el trabajo total del sistema quedará $\delta \mathcal{E} = \sum_{j=1}^{3n} Q_j \delta q_j + \lambda_1 \delta \phi_1 + \lambda_2 \delta \phi_2 + \dots + \lambda_m \delta \phi_m = \sum_{j=1}^{3n} Q_j^* \delta q_j = 0$ siendo $Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} = Q_j^*$.

En consecuencia, ahora tenemos $3n+m$ incógnitas ($q_1, q_2, \dots, q_{3n}$) + ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$), pero a cambio hemos conseguido que las $3n$ q_j sean independientes, pudiendo resolver el sistema anulando las $3n$ Q_j^* de la expresión del trabajo total y recurriendo a las m ecuaciones de enlace para igualar el número de incógnitas y proceder a su resolución:

$$\begin{aligned}
 Q_1 + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_1} &= 0 \\
 Q_2 + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_2} &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 Q_{3n} + \lambda_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial q_{3n}} + \lambda_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial q_{3n}} + \dots + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_{3n}} &= 0
 \end{aligned}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \begin{bmatrix} q_1^o \\ q_2^o \\ \dots \\ q_{3n}^o \\ \lambda_1^o \\ \lambda_2^o \\ \dots \\ \lambda_m^o \end{bmatrix}
 \quad [13.32]$$

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \phi_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0 \\
 \phi_2 &= \phi_2(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0 \\
 \dots &\dots \\
 \phi_s &= \phi_s(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) = 0
 \end{aligned}$$

Aunque no parece muy alentador, este procedimiento se impone de no ser fácil o factible determinar las coordenadas libres, pero presenta una ventaja adicional ya que permite abordar aquellos casos en que los enlaces **no** son **holónomos** simplemente afectando cada ecuación de un multiplicador pues, como recordaremos, presentaban ya las ecuaciones en forma diferencial:

$$\varphi_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_1 + \varphi_2(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_2 + \dots + \varphi_{3n}(q_1, q_2, \dots, q_{3n}) \delta q_{3n} = 0$$

que no admitían integración:

$$\begin{aligned}
 (\lambda_1) \quad \varphi_{11} \delta q_1 + \varphi_{12} \delta q_2 + \dots + \varphi_{13n} \delta q_{3n} &= 0 \\
 (\lambda_2) \quad \varphi_{21} \delta q_1 + \varphi_{22} \delta q_2 + \dots + \varphi_{23n} \delta q_{3n} &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 (\lambda_m) \quad \varphi_{m1} \delta q_1 + \varphi_{m2} \delta q_2 + \dots + \varphi_{m3n} \delta q_{3n} &= 0
 \end{aligned}
 \quad [13.33]$$

conduciendo a una expresión del trabajo análoga al caso de enlaces holónomos:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{j=1}^{3n} Q_j \delta q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^{3n} \varphi_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^{3n} \left[Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ij} \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^{3n} Q_j^* \delta q_j = 0 \quad [13.34]$$

aunque las m ecuaciones adicionales vienen ahora en forma diferencial:

$$\begin{aligned}
 Q_1 + \lambda_1 \varphi_{11} + \lambda_2 \varphi_{21} + \dots + \lambda_m \varphi_{m1} &= 0 \\
 Q_2 + \lambda_1 \varphi_{12} + \lambda_2 \varphi_{22} + \dots + \lambda_m \varphi_{m2} &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 Q_{3n} + \lambda_1 \varphi_{13n} + \lambda_2 \varphi_{23n} + \dots + \lambda_m \varphi_{m3n} &= 0 \\
 \varphi_{11} \delta q_1 + \varphi_{12} \delta q_2 + \dots + \varphi_{13n} \delta q_{3n} &= 0 \\
 \varphi_{21} \delta q_1 + \varphi_{22} \delta q_2 + \dots + \varphi_{23n} \delta q_{3n} &= 0 \\
 \dots &\dots \\
 \varphi_{m1} \delta q_1 + \varphi_{m2} \delta q_2 + \dots + \varphi_{m3n} \delta q_{3n} &= 0
 \end{aligned}
 \quad \Leftrightarrow \quad
 \begin{bmatrix} q_1^o \\ q_2^o \\ \dots \\ q_{3n}^o \\ \lambda_1^o \\ \lambda_2^o \\ \dots \\ \lambda_m^o \end{bmatrix}
 \quad [13.35]$$

13.5 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRIO.

Una de las cosas tanto o más importantes que conocer la configuración de equilibrio es determinar su estabilidad. Para un punto era más o menos fácil hacerlo por tanteos, alejándolo ligeramente de la posición de equilibrio, aunque resultaba preciso cuando las fuerzas eran conservativas y se relacionaba con el potencial. En un sistema material el desplazar uno de los puntos implica arrastrar todos los demás, con lo que el método del "tanteo" puede resultar terrorífico, sobre todo si el sistema tiene s grados de libertad. Pero si las fuerzas son conservativas, es decir, derivan de un potencial $\vec{F}_i = -g\vec{rad} E_{p_i}$, sustituyendo en la expresión del trabajo vemos que:

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n -g\vec{rad} E_{p_i} \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^n -\delta E_{p_i} = -\delta \sum_{i=1}^n E_{p_i} = -\delta E_p = 0 \quad [13.36]$$

es decir, como la energía es aditiva, la suma de la energía de cada punto será la energía total del sistema material y, como estamos analizando el entorno de la configuración de equilibrio, para el que $\delta \mathcal{E} = -\delta E_p = 0$, el equilibrio va ligado a los extremos de la función de energía potencial total del sistema que depende, a su vez, de las q_i o de las otras relacionadas entre sí, es decir $E_p = E_p(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0$.

Ahora bien, $E_p - E_{p_i} = \Delta E_p = \delta E_p + \frac{1}{2!} \delta^2 E_p + \dots + \frac{1}{n!} \delta^n E_p \equiv 0$ y como $\delta E_p = 0$ en la posición de equilibrio, el signo de la energía potencial al separar el sistema de ella lo va a proporcionar el 2º sumando (o el 3º si también se anula) y como $E_p = E_p(q_1, q_2, \dots, q_s) \Rightarrow \delta E_p(q_1, q_2, \dots, q_s) = \frac{\partial E_p}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial E_p}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial E_p}{\partial q_s} \delta q_s$ y diferenciando otra vez:

$$\begin{aligned} \delta^2 E_p(q_1, q_2, \dots, q_s) &= \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} \delta q_1^2 + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} \delta q_1 \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_s} \delta q_1 \delta q_s + \\ &+ \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_1} \delta q_2 \delta q_1 + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} \delta q_2^2 + \dots + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_s} \delta q_2 \delta q_s + \\ &+ \dots + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_1} \delta q_s \delta q_1 + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_2} \delta q_s \delta q_2 + \dots + \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s^2} \delta q_s^2 = \\ &= (\delta q_1 \ \delta q_2 \ \dots \ \delta q_s) \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_1 \partial q_s} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_2 \partial q_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_1} & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_s^2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \delta q_1 \\ \delta q_2 \\ \dots \\ \delta q_s \end{pmatrix} \quad [13.37] \end{aligned}$$

proporcionando el signo que buscamos precisamente el Hessiano H de forma similar a como veíamos para el punto, solo que en esta ocasión tenemos s variables, no 3 o 2.

En resumen, si al separar el sistema ligeramente de la posición de equilibrio la energía potencial es mayor, el incremento será positivo y, por tanto el Hessiano, correspondiendo a un mínimo de la función, lo que significa que el sistema volverá a la posición inicial ya que los cuerpos tienden naturalmente a ocupar posiciones de menor energía potencial y el equilibrio será Estable. Si, por el contrario, la energía potencial final es menor que la inicial (máximo) el equilibrio será Inestable y el sistema se alejará aún más de la posición de equilibrio. En caso de que no cambie el equilibrio será indiferente.

GEOMETRÍA DE MASAS

14.1 OBTENCIÓN DEL C.D.M. O C.D.G. DEL SÓLIDO. TEOREMAS DE GULDIN.

Una de las constantes que van a surgir en el estudio del sólido (tanto en el equilibrio como en el movimiento) es su propio peso formando parte del sistema de fuerzas exteriores, aunque en ocasiones pueda llegar a considerarse despreciable frente al valor de otras fuerzas activas de mayor valor. Y aunque estamos habituados a considerar el peso como una fuerza discreta, no hay que perder de vista que trataremos el sólido como un sistema material continuo y, en consecuencia, sería más riguroso hablar de un sistema de continuo de vectores diferenciales paralelos, resultante de considerar una intensidad gravitatoria -de valor prácticamente constante para las dimensiones del sólido- aplicada sobre los elementos diferenciales de masa que constituyen el sólido a estudiar. De ahí que el centro de gravedad se obtenga como centro de vectores paralelos y su identidad formal con el centro de masas anteriormente definido -respecto al cual estamos reduciendo todos los Teoremas de la Mecánica- que nos permitirá finalmente abordar el estudio del sólido, con ayuda de la Teoría de Vectores Deslizantes, en base a la hipótesis inicial de rigidez e indeformabilidad.

Generalizando a sistemas continuos la definición que veíamos para el c.d.g. de un sistema discreto de partículas materiales, entendido como centro del sistema de vectores paralelos aplicados constituido por los pesos de cada una de las partículas, y de su identidad formal para los sistemas de tamaño corriente en la proximidad de la superficie de la Tierra con la expresión del c.d.m. $\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \equiv \vec{r}_G$, podremos escribir $\vec{r}_G = \frac{\int dm_i \vec{r}_i}{\int dm_i} = \vec{r}_C$:

$$x_G = \frac{\int dm_i x_i}{\int dm_i} = x_C \quad y_G = \frac{\int dm_i y_i}{\int dm_i} = y_C \quad z_G = \frac{\int dm_i z_i}{\int dm_i} = z_C \quad [14.1]$$

cuyos numeradores se denominan también MOMENTOS ESTÁTICOS (o de 1^{er}. orden, para diferenciarlos de los momentos de inercia o de 2^o orden que veremos a continuación) del sistema material respecto a los planos correspondientes: $M_{xoy} = \sum m_i z_i$, $M_{xoz} = \sum m_i yz_i$, $M_{yoz} = \sum m_i xz_i$.

Al considerar sistemas continuos de masas tenemos que introducir el concepto "DENSIDAD" o masa por unidad de volumen $\rho = \frac{dm}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ que, para un cuerpo no homogéneo se expresará mediante su valor en función de la posición $\rho_p(x, y, z)$ aunque lo habitual será trabajar con cuerpos de densidad uniforme, en cuyo caso coincidirá el c.d.g. o c.d.m. con el centro geométrico al reducirse la expresión a términos de volumen:

$$\vec{r}_G = \frac{\int dm_i \vec{r}_i}{\int dm_i} = \frac{\int \rho dv_i \vec{r}_i}{\int \rho dv_i} = \frac{\int dv_i \vec{r}_i}{\int dv_i} \quad [14.2]$$

Si se trata de un sistema material formado por N partes diferenciadas, ya sea por densidades o por geometría, podemos descomponer el sumatorio o la integral en N sumatorios y trabajar con los c.d.g. de cada una de las partes como si estuviera concentrada en ellos las respectivas masas, resultando:

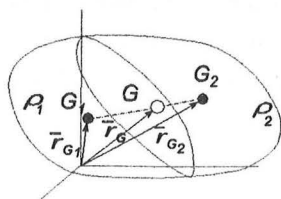


Figura 14.1

$$\begin{aligned} \sum M_i \vec{r}_G &= \int dm_i \vec{r}_i = \int \rho_i dv_i \vec{r}_i = \rho_1 \int_{V_1} dv_i \vec{r}_i + \rho_2 \int_{V_2} dv_i \vec{r}_i \dots + \rho_N \int_{V_N} dv_i \vec{r}_i = \\ &= \rho_1 V_1 \vec{r}_G^1 + \rho_2 V_2 \vec{r}_G^2 \dots + \rho_N V_N \vec{r}_G^N = M_1 \vec{r}_G^1 + M_2 \vec{r}_G^2 \dots + M_N \vec{r}_G^N \end{aligned}$$

Si la distribución de masas fuera superficial (una de las tres dimensiones despreciable frente a las otras dos) o longitudinal (predominando una frente a las otras dos), en lugar de una integral de volumen tendríamos una integral de superficie o lineal respectivamente para lo cual tendríamos que utilizar densidades superficiales o lineales con el mismo criterio que la densidad de volumen, es decir, $\sigma = \frac{dm}{ds} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$ o $\lambda = \frac{dm}{dL}$, resultando las expresiones del c.d.g. en la forma:

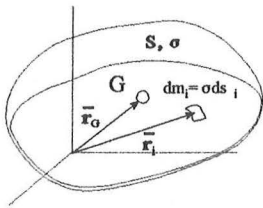


Figura 14.2

$$x_G = \frac{\iint \sigma ds_i x_i}{\iint \sigma ds_i}$$

$$y_G = \frac{\iint \sigma ds_i y_i}{\iint \sigma ds_i}$$

$$z_G = \frac{\iint \sigma ds_i z_i}{\iint \sigma ds_i}$$

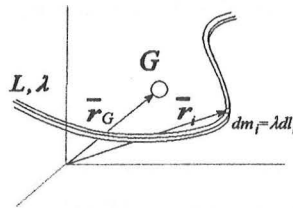


Figura 14.3

$$x_G = \frac{\int \lambda dl_i x_i}{\int \lambda dl_i}$$

$$y_G = \frac{\int \lambda dl_i y_i}{\int \lambda dl_i}$$

$$z_G = \frac{\int \lambda dl_i z_i}{\int \lambda dl_i}$$

En base a estas expresiones, para **sistemas materiales planos** con **distribución homogénea y continua** de masa podemos eliminar las densidades y escribir:

$$y_G L = \int y dl \quad \Rightarrow \quad 2 \pi y_G L = \int 2 \pi y dl = \int ds = S \quad [14.6]$$

para elementos longitudinales o

$$y_G S = \int y ds \quad \Rightarrow \quad 2 \pi y_G S = \int 2 \pi y ds = \int dv = V \quad [14.7]$$

para elementos superficiales, cuya interpretación nos dice que:

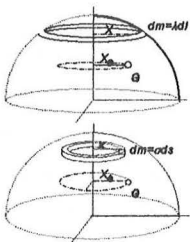


Figura 14.4

La superficie engendrada por una curva plana al girar alrededor de un eje que no la corta es igual al producto de la longitud de la curva generatriz por la longitud de la circunferencia que genera el c.d.g. de la curva en el giro.

El volumen engendrado por una sección plana al girar alrededor de un eje que no la corta es igual al producto del área de la sección generatriz por la longitud de la circunferencia que genera el c.d.g. de la sección en el giro.

constituyendo los enunciados de los **TEOREMAS DE GULDIN** de gran utilidad en el cálculo de superficies o volúmenes de figuras geométricas a partir del conocimiento de su c.d.g. o viceversa.

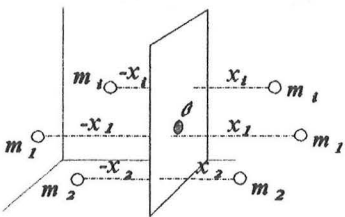


Figura 14.5

Aunque para la determinación de los c.d.g. de cuerpos homogéneos, **la existencia de planos o ejes de simetría** es sin duda la mayor utilidad. En efecto, de las expresiones cartesianas se deduce inmediatamente que la suma de momentos estáticos $m_i x_i$ respecto a dicho plano de elementos de igual masa situados a ambos lados se anulan entre sí:

$$M_{yoz} = \sum m_i x_i = m_1 x_1 + m_1 (-x_1) + m_2 x_2 + m_2 (-x_2) + \dots + m_i x_i + m_i (-x_i) = M x_G = 0$$

luego, de existir algún plano de simetría, el centro de gravedad de un cuerpo homogéneo se encontrará en él.

14.2 INERCIA MATERIAL A GIRO Y TRASLACIÓN.

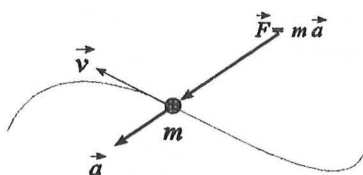


Figura 14.6

Mientras que una fuerza $\vec{F}$ aplicada sobre una partícula material le proporciona una aceleración $\vec{a}$ en la misma dirección y sentido de aquella, de valor proporcional a una constante m denominada “*masa de inercia*” o “*masa inerte*” del material, según la ecuación fundamental del 2º Principio:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F}{a} \quad [14.9]$$

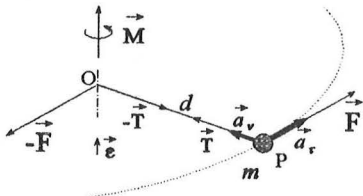


Figura 14.7

la aplicación de un momento $\vec{M}$ sobre la partícula ligada a un punto O, origina un giro relativo, de eje perpendicular al par equivalente $[\vec{F}, -\vec{F}]$ y aceleración α proporcional a otra constante $I_e = m\delta^2$ que vamos a denominar “*momento de inercia*” de la partícula respecto al punto o más exactamente respecto al eje de giro, supuesta invariable su dirección.

En efecto, como el momento del par es independiente del punto del espacio, tomando momentos en O, donde se supone aplicada la reacción, tendremos el vector $\vec{M} = \vec{OP} \times \vec{F}$ de dirección $\vec{e}$ ortogonal al plano y módulo:

$$M = \vec{M} \cdot \vec{e} = F\delta = m a_t \delta = m \delta \frac{dv}{dt} = m \delta \frac{d\omega\delta}{dt} = m \delta^2 \frac{d\omega}{dt} = m \delta^2 \alpha = I\alpha \quad \Rightarrow \quad I = m \delta^2 = \frac{M}{\alpha} \quad [14.10]$$

En ambos casos la interpretación es similar ya que podríamos considerar la *masa* y el *momento de inercia* como una “*vagancia*” o “*inercia*” a la traslación $\vec{F} = m\vec{a}$ y el giro $\vec{M} = I\vec{\alpha}$ que se manifiesta a nivel aceleración, lineal o angular respectivamente, de la partícula material. Es decir, a mayor masa o momento de inercia menor será la respectiva aceleración, luego se trata de unas magnitudes aditivas que, por tratarse de valores escalares, no podrán depender del sistema de referencia elegido para su utilización.

Podremos, en consecuencia, generalizar fácilmente a un sistema material rígido ya que venimos descomponiendo su movimiento en un giro $\vec{\omega}$ y en una traslación, por ejemplo la del centro de gravedad por las ventajas que conllevará, $\vec{V}_G$, únicos para todos los puntos del sólido de forma que, en todo instante, podrá sacarse factor común $\vec{a}$ (o más exactamente $\frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ya que el otro término *no siempre será correcto*) y $\vec{a}_G$ lo que nos permitirá reducir los Teoremas de la Mecánica al centro de gravedad, atribuyendo la traslación del sólido a la resultante de las fuerzas exteriores $\Sigma \vec{F} = M \vec{a}_G$ y el giro al momento resultante de dichas fuerzas $\vec{M}_G = \frac{d}{dt} \left[\vec{I}_G \cdot \vec{\omega} \right]$.

Y como el momento de inercia conlleva una dirección respecto a la cual vaya a girar el sistema material, necesitaríamos conocer en todo instante la dirección del eje de rotación -y su posición relativa al sistema en caso de haber elegido otro punto de reducción distinto del centro de gravedad- para lo cual será preciso desarrollar una teoría mínima que nos facilite su comprensión y los procedimientos necesarios para el planteamiento de los problemas de la Mecánica del sólido y su resolución.

14.3 MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE DE DIRECCIÓN VARIABLE.

Expresaremos el *momento de inercia* de un elemento de masa dm respecto a una recta Δ -que hacemos pasar por el origen de un sistema de referencia arbitrario- como el *producto de la masa por el cuadrado de la distancia* a la recta:

$$I_\Delta = dm \delta^2 = dm [r \sin \varphi]^2 = dm |\vec{r} \times \vec{u}|^2$$

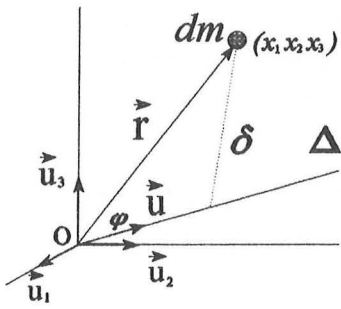


Figura 14.8

donde $\vec{r} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3 = x_i \vec{u}_i$ es el vector de posición del elemento de masa y $\vec{u} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \alpha_3 \vec{u}_3 = \alpha_i \vec{u}_i$ el unitario en la dirección de Δ de forma que:

$$\vec{r} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{u}_1 & \vec{u}_2 & \vec{u}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = [x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2] \vec{u}_1 + [x_3 \alpha_1 - x_1 \alpha_3] \vec{u}_2 + [x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1] \vec{u}_3$$

y el valor del cuadrado de la distancia para cada partícula será:

$$\begin{aligned} |\vec{r} \times \vec{u}|^2 &= [x_2 \alpha_3 - x_3 \alpha_2]^2 + [x_3 \alpha_1 - x_1 \alpha_3]^2 + [x_1 \alpha_2 - x_2 \alpha_1]^2 = \\ &= x_2^2 \alpha_3^2 + x_3^2 \alpha_2^2 - 2 x_2 x_3 \alpha_3 \alpha_2 + x_3^2 \alpha_1^2 + x_1^2 \alpha_3^2 - 2 x_3 x_1 \alpha_3 \alpha_1 + x_1^2 \alpha_2^2 + x_2^2 \alpha_1^2 - 2 x_1 x_2 \alpha_2 \alpha_1 \\ &= [x_2^2 + x_3^2] \alpha_1^2 + [x_1^2 + x_3^2] \alpha_2^2 + [x_1^2 + x_2^2] \alpha_3^2 - 2 x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 - 2 x_2 x_3 \alpha_2 \alpha_3 - 2 x_1 x_3 \alpha_3 \alpha_1 \end{aligned}$$

que multiplicada por la masa correspondiente y sumando los términos de todo el sistema -o integrando si se trata de sistemas continuos- nos da una expresión:

$$I_\Delta = \sum m_i [x_2^2 + x_3^2] \alpha_1^2 + \sum m_i [x_1^2 + x_3^2] \alpha_2^2 + \sum m_i [x_1^2 + x_2^2] \alpha_3^2 - 2 \sum m_i x_1 x_2 \alpha_1 \alpha_2 - 2 \sum m_i x_2 x_3 \alpha_2 \alpha_3 - 2 \sum m_i x_1 x_3 \alpha_3 \alpha_1$$

cuya notación simbólica se reduce a una función de los cosenos directores $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ de la recta respecto a la cual se pretende calcular:

$$I_\Delta = I_{11} \alpha_1^2 + I_{22} \alpha_2^2 + I_{33} \alpha_3^2 - 2 I_{12} \alpha_1 \alpha_2 - 2 I_{23} \alpha_2 \alpha_3 - 2 I_{13} \alpha_1 \alpha_3 \quad [14.11]$$

y que podemos también escribir en forma matricial o tensorial:

$$I_\Delta = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \vec{u} \cdot \bar{\bar{I}}_O \cdot \vec{u}$$

expresada como producto escalar de un vector por el resultado del producto interno o contraído del tensor obtenido por el mismo vector -que obviamente es otro vector- resultando finalmente un escalar y como tal, INVARIANTE, es decir, independiente del sistema de referencia elegido para su obtención.

14.4 MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA EN EJES DE REFERENCIA.

Para obtener el momento de inercia del sistema material respecto a una recta de dirección variable hemos tenido que adoptar previamente un punto obligado de la recta -que se adopta como origen de referencia- y unos ejes coordenados respecto a los cuales referir dicha dirección.

Mientras que orígenes diversos conducirían a rectas paralelas y por tanto a valores distintos del momento de inercia, el cambio de ejes con un origen común no puede influir en ese valor ya que se trata de una magnitud representativa de la distribución de la masa en torno al eje "de giro" exclusivamente. Dicho de otro modo, el TENSOR -que denominaremos DE INERCIA- asociará a cada dirección Δ un mismo valor escalar I_Δ independientemente de la base de referencia -Invariante- pero será un operador ligado a la posición del punto O.

Esos términos o conjunto de 6 números (simetría) obtenidos en [14.11] dependerán, por tanto, del sistema de referencia, y aunque podamos aplicar la teoría de tensores para relacionar los términos asociados en un cambio de base resulta obvio que al menos 6 los tengamos que calcular, por lo que necesitamos analizar si tienen un significado especial y si existen procedimientos que simplifiquen su obtención.

En efecto tres de esos términos son fácilmente identificables como **MOMENTOS DE INERCIA respecto a los ejes coordenados** -al ser sumas (o integrales) de masas por distancias al cuadrado a los respectivos ejes- que se representarán con dos subíndices iguales I_{ii} :

$$I_{11} = \sum m_i [x_2^2 + x_3^2] \quad I_{22} = \sum m_i [x_1^2 + x_3^2] \quad I_{33} = \sum m_i [x_1^2 + x_2^2] \quad [14.13]$$

para diferenciarlos de los I_{ij} , $i \neq j$ denominados **PRODUCTOS DE INERCIA respecto a los planos coordenados**:

$$I_{12} = \sum m_i x_1 x_2 \quad I_{23} = \sum m_i x_2 x_3 \quad I_{13} = \sum m_i x_1 x_3 \quad [14.14]$$

que, por tratarse de suma (o integrales) de masas por distancias a dos planos coordenados, no tienen significado físico como los momentos de inercia, sino exclusivamente matemático, como operadores ligados al *sistema de referencia elegido y al punto de aplicación*.

Y puesto que el sistema de referencia es la base para la obtención de los momentos y productos de inercia -llamémosles "*de referencia*"- que nos permitirán obtener I_Δ para cualquier dirección, vemos que su utilidad no se limita a la obtención de aquéllos, sino que nos proporciona otros entes matemáticos cuya relación con I_{11} , I_{22} e I_{33} va a permitir simplificar su cálculo, sobre todo en casos claros de simetría en el sistema material:

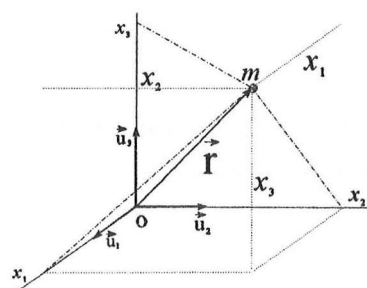


Figura 14.9

Momento de Inercia respecto a los planos coordenados:

$$I_1 = I_{\alpha x_2 x_3} = m x_1^2 \quad I_2 = I_{\alpha x_1 x_3} = m x_2^2 \quad I_3 = I_{\alpha x_1 x_2} = m x_3^2$$

Momento de Inercia respecto al origen de referencia O:

$$I_o = m r^2 = m (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = m x_1^2 + m x_2^2 + m x_3^2 = I_1 + I_2 + I_3$$

cuya relación con los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados será:

$$2 I_o = 2 m x_1^2 + 2 m x_2^2 + 2 m x_3^2 = m (x_2^2 + x_3^2) + m (x_1^2 + x_3^2) + m (x_1^2 + x_2^2) = I_{11} + I_{22} + I_{33} \quad [14.15]$$

que podemos resumir en las siguientes relaciones:

$$I_o = I_1 + I_2 + I_3$$

$$I_o = \frac{I_{11} + I_{22} + I_{33}}{2}$$

$$\begin{aligned} I_{11} &= I_2 + I_3 \\ I_{22} &= I_3 + I_1 \\ I_{33} &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

y por las cuales:

- *El momento de inercia respecto a un eje es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a los planos coordenados cuya intersección es dicho eje.*
- *El momento de inercia respecto a un punto es la suma de los momentos de inercia respecto a 3 planos ortogonales que se corten en él.*
- *El momento de inercia respecto a un punto es la semisuma de los momentos de inercia respecto a 3 ejes ortogonales entre sí que se corten en aquél.*

Aunque de la propia definición de momento y producto de inercia se deducen otras conclusiones también de gran utilidad como que:

- **Los momentos de inercia nunca podrán ser negativos** ya que se trata de suma de productos de masas por distancias al cuadrado y ninguno de esos términos puede serlo, mientras que **los productos de inercia podrán ser positivos o negativos** según esté distribuida la masa del sistema respecto a los ejes positivos de referencia, ya que se trata de productos de coordenadas -no de distancias- y el signo dependerá de la situación.
- Por lo mismo, al ser siempre aditivos, **los momentos de inercia** respecto a un eje **no podrán anularse**, en general, salvo si la masa del sistema se distribuye linealmente a lo largo de aquél (por ejemplo, una varilla de espesor despreciable) y, en consecuencia, ya no podrán anularse los momentos respecto a los otros dos ejes ortogonales a él.
- Por último, la adopción de **un plano de simetría** como plano coordenado, además de contener el centro de gravedad del sistema, **anulará los productos de inercia** en los que intervenga la distancia a él, denominándose en tal caso **PLANO PRINCIPAL DE INERCIA**, sea cual sea el origen de referencia adoptado y, por tanto, el eje ortogonal. En efecto:

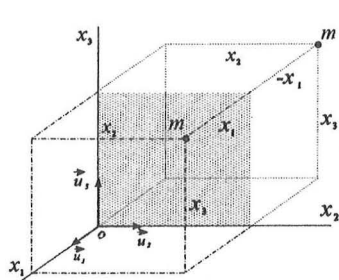


Figura 14.10

$$\begin{aligned} \text{si } \forall m \quad \begin{cases} x_i = -x_i' \\ x_j = x_j' \\ x_k = x_k' \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} I_{ij} = \sum m x_i x_j + \sum m' x_i' x_j' = \sum m x_i x_j - \sum m x_i x_j = 0 \\ I_{ik} = \sum m x_i x_k + \sum m' x_i' x_k' = \sum m x_i x_k - \sum m x_i x_k = 0 \end{cases} \\ \exists m' = m \end{aligned}$$

por lo que la existencia de dos planos de simetría anulará todos los productos de inercia del tensor, independientemente del origen y los ejes de referencia adoptados, que se denominarán **EJES PRINCIPALES DE INERCIA**, siempre que uno de ellos sea precisamente el de intersección.

No obstante, la relación no es biunívoca y el que se anulen los productos no implica que existan simetrías o dicho de otro modo, que si no se dan simetrías no se puedan anular. De hecho, como estudiamos en tensores, siempre podemos diagonalizar un tensor simétrico, por lo que, **aún no habiendo simetrías, siempre existirán** para cada punto del espacio unas **"direcciones principales"** respecto de las cuales se anulen los términos que no ocupen la diagonal principal. En consecuencia, los momentos de inercia respecto a dichas direcciones se denominarán **MOMENTOS PRINCIPALES DE INERCIA** y el tensor correspondiente se expresará en su forma diagonal:

$$\begin{vmatrix} I_{11}^o & 0 & 0 \\ 0 & I_{22}^o & 0 \\ 0 & 0 & I_{33}^o \end{vmatrix}$$

14.5 TEOREMAS DE STEINER RELATIVOS A MOMENTOS Y PRODUCTOS DE INERCIA

Dado que la existencia de planos de simetría va a simplificar considerablemente los cálculos y además en ellos se van a encontrar los centros de masas o de gravedad, buscando una relación entre un sistema de referencia considerado y otro paralelo a él con origen en G nos vamos a encontrar ciertas propiedades claves para resolver cualquier problema de geometría de masas.

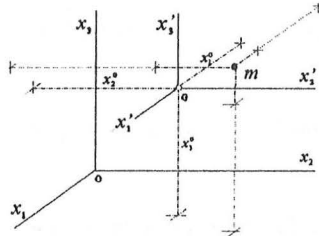


Figura 14.11

Siendo (x_1, x_2, x_3) las coordenadas de un elemento de masa del sistema respecto a los ejes con origen en O y (x'_1, x'_2, x'_3) las coordenadas relativas a los ejes paralelos con origen en G, localizado también respecto a O mediante sus coordenadas (x_1^G, x_2^G, x_3^G) , podemos hacer $x_i = x'_i + x_i^G$, que sustituidas en las expresiones correspondientes de los momentos y productos de inercia y teniendo en cuenta que $\sum m x'_i = M x_i^G = 0$ por ser G precisamente el nuevo origen de referencia, nos darán:

- MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN PUNTO:

$$\begin{aligned} I_0 &= \sum m r^2 = \sum m (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \sum m [x'_1 + x_1^G]^2 + \sum m [x'_2 + x_2^G]^2 + \sum m [x'_3 + x_3^G]^2 = \\ &= \sum m [x'^2_1 + x_1^G + 2x'_1 x_1^G] + \sum m [x'^2_2 + x_2^G + 2x'_2 x_2^G] + \sum m [x'^2_3 + x_3^G + 2x'_3 x_3^G] = \\ &= \sum m [x_1^G + x_2^G + x_3^G] + \sum m [x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3] + 2x_1^G \sum m x'_1 + 2x_2^G \sum m x'_2 + 2x_3^G \sum m x'_3 = \\ &= M \cdot \overline{OG}^2 + I_G + 2x_1^G M x'_1 + 2x_2^G M x'_2 + 2x_3^G M x'_3 = M \cdot \overline{OG}^2 + I_G \end{aligned}$$

y en general entre cualesquiera dos puntos siempre que uno de ellos sea el centro de gravedad.

- MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN EJE:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum m [x_2^2 + x_3^2] = \sum m [x'_2 + x_2^G]^2 + \sum m [x'_3 + x_3^G]^2 = \\ &= \sum m [x'^2_2 + x_2^G + 2x'_2 x_2^G] + \sum m [x'^2_3 + x_3^G + 2x'_3 x_3^G] = \\ &= \sum m [x_2^G + x_3^G] + \sum m [x'^2_2 + x'^2_3] + 2x_2^G \sum m x'_2 + 2x_3^G \sum m x'_3 = \\ &= M d_{11}^2 + I_{11}^G + 2x_2^G M x'_2 + 2x_3^G M x'_3 = M d_{11}^2 + I_{11}^G \end{aligned}$$

y análogamente con los restantes ejes y en general cualesquiera dos rectas paralelas a condición que una de ellas pase por el centro de gravedad.

- MOMENTO DE INERCIA RESPECTO A UN PLANO:

$$I_1 = \sum m x_1^2 = \sum m [x'_1 + x_1^G]^2 = \sum m [x'^2_1 + x_1^G + 2x'_1 x_1^G] = \sum m x_1^G + \sum m x'^2_1 + 2x_1^G \sum m x'_1 = M d^2 + I_1^G$$

y análogamente con los restantes planos y en general cualesquiera dos planos paralelos a condición que uno de ellos pase por el centro de gravedad.

- PRODUCTOS DE INERCIA:

$$I_{ij} = \sum m x_i x_j = \sum m [x'_i + x_i^G] [x'_j + x_j^G] = \sum m [x_i^G x_j^G + x'_i x'_j + x_i^G x'_j + x'_i x_j^G] = M x_i^G x_j^G + I_{ij}^G$$

Resumiendo, conocida la expresión de los momentos y productos de inercia de un sistema material respecto a ejes o planos *-principales o no-* que pasen por su centro de gravedad, cuyo *TENSOR* se denominará *CENTRAL*, podemos deducir *-mediante los Teoremas de Steiner-* los correspondientes a otros paralelos a los anteriores sin más que sumar el término del momento o producto de inercia de toda la masa del sistema supuesta concentrada en él, por lo que los valores más pequeños serán obviamente los correspondientes al c.d.g.. En consecuencia, podemos obtener un tensor para cualquier punto del espacio cuya expresión dependerá además de las direcciones de los ejes de referencia a adoptar, y no podrá existir un solo punto que no le corresponda un tensor salvo que el sistema se trate de un único punto material.

En otras palabras, si cada punto del espacio tiene asociado un tensor de inercia correspondiente a cada sistema material nos encontramos ante un campo tensorial que, como tal, admitirá una representación gráfica y, aunque el tensor es muy significativo por sí solo, la cuádrica asociada a cada tensor nos da una idea mucho más inmediata de la distribución espacial del sistema material.

14.6 ELIPSOIDE ASOCIADO AL TENSOR DE INERCIA.

Tenemos, hasta ahora que, conocidos los términos del tensor de un sistema material $I_{ij} = \sum m x_i x_j$ (momentos de inercia para $i=j$ o producto de inercia si $i \neq j$) respecto a unos ejes ortogonales en un punto O determinado del espacio, podemos obtener el momento de inercia respecto a cualquier recta Δ que pase por él en función de los cosenos directores $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ respecto a dichos ejes de la recta en cuestión:

$$I_{\Delta} = I_{11} \alpha_1^2 + I_{22} \alpha_2^2 + I_{33} \alpha_3^2 - 2I_{12} \alpha_1 \alpha_2 - 2I_{23} \alpha_2 \alpha_3 - 2I_{13} \alpha_1 \alpha_3 = [\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3] \begin{bmatrix} I_{11} & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_{22} & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \vec{u} \cdot \vec{I}_O \cdot \vec{u} \quad [14.17]$$

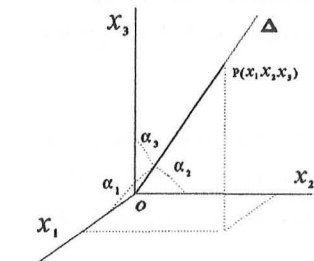


Figura 14.12

La forma más inmediata de representar de manera gráfica I_{Δ} sería asociando directamente a dicha recta un segmento OP proporcional al momento de inercia obtenido, pero como *-por Steiner-* cuanto más alejada estuviera del c.d.g. mayor resultaría el momento, por efectividad dicho segmento lo elegiremos inversamente proporcional a la raíz cuadrada de aquél $OP = \frac{1}{\sqrt{I_{\Delta}}}$ que, al igual que I_{Δ} , no podrá depender del sistema de referencia adoptado ni del origen O siempre que sea un punto perteneciente a la recta por ser un invariante escalar.

Como el extremo del segmento OP tendrá por coordenadas $x_i = OP \alpha_i$ podremos expresar los cosenos directores de la recta en función del momento de inercia $\alpha_i = \sqrt{I_{\Delta}} x_i$ de modo que sustituidos en la [14.17]:

$$I_{\Delta} = I_{11} I_{\Delta} x_1^2 + I_{22} I_{\Delta} x_2^2 + I_{33} I_{\Delta} x_3^2 - 2I_{12} I_{\Delta} x_1 x_2 - 2I_{23} I_{\Delta} x_2 x_3 - 2I_{13} I_{\Delta} x_1 x_3$$

y simplificando la dejará en la forma:

$$I_{11} x_1^2 + I_{22} x_2^2 + I_{33} x_3^2 - 2I_{12} x_1 x_2 - 2I_{23} x_2 x_3 - 2I_{13} x_1 x_3 = 1 \quad [14.18]$$

correspondiente a la ecuación de una cuádrica cuyos términos principales se corresponden con los momentos de inercia respecto a los ejes coordenados y por tanto $I_{11} \geq 0$ $I_{22} \geq 0$ $I_{33} \geq 0$ de modo que se tratará de un *ELIPSOIDE* que se denominará *DE INERCIA* y estará asociado al tensor en el punto O.

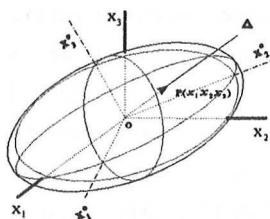


Figura 14.13

En definitiva, por la forma en que lo hemos obtenido, el elipsoide representa el lugar geométrico de los extremos de los segmentos OP que nos proporciona el valor del momento de inercia del sistema material respecto a la dirección definida por cada punto P de su superficie y el centro O donde hemos fijado el origen y como hemos visto que OP no dependerá del sistema de referencia, el elipsoide asociado a cada punto será único y tampoco dependerá de él, aunque su expresión podrá variar según los ejes adoptados, al igual que el propio tensor.

Así, de tratarse de los ejes principales del tensor, respecto a los cuales los productos de inercia serán nulos, la expresión del elipsoide quedará referida a sus ejes geométricos:

$$I_{11}^o x_1^2 + I_{22}^o x_2^2 + I_{33}^o x_3^2 = 1 \quad \approx \quad \frac{x_1^2}{\frac{1}{I_{11}^o}} + \frac{x_2^2}{\frac{1}{I_{22}^o}} + \frac{x_3^2}{\frac{1}{I_{33}^o}} = 1 \quad \approx \quad \frac{x_1^2}{\rho_{11}^2} + \frac{x_2^2}{\rho_{22}^2} + \frac{x_3^2}{\rho_{33}^2} = 1 \quad [14.19]$$

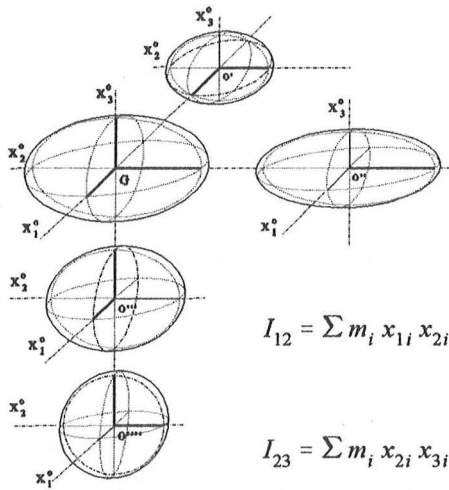
siendolosdenominadoresprecisamenteloscuadradosdelossemidiámetroscorrespondientesacada dirección $\rho_{11} = \frac{1}{\sqrt{I_{11}^o}}$, $\rho_{22} = \frac{1}{\sqrt{I_{22}^o}}$, $\rho_{33} = \frac{1}{\sqrt{I_{33}^o}}$ cuyos valores serán proporcionales los momentos de inercia principales del tensor

Del análisis del elipsoide de inercia podemos extraer algunas conclusiones adicionales a las deducidas de la propia definición del tensor:

- Si dos de los momentos principales de inercia son iguales el elipsoide de inercia será de revolución, lo que equivale a decir que serán iguales los momentos de inercia respecto a cualquier recta contenida en el plano definido por las direcciones principales correspondientes.
- Como consecuencia de lo anterior, en caso de existir dos o más planos de simetría que se corten formando un haz el elipsoide será de revolución con eje el mismo del haz (por ejemplo, el elipsoide de un prisma recto homogéneo de base poligonal cualquiera).
- Sin embargo, no puede afirmarse lo mismo a la inversa; es decir que siendo iguales los momentos respecto a dos direcciones ortogonales el elipsoide sea de revolución ya que en toda elipse siempre podemos encontrar dos diámetros ortogonales iguales. Para que sea de revolución han de tratarse de direcciones principales y por tanto los productos de inercia se han de anular.
- En el límite, si existen tres direcciones principales respecto de las cuales el momento de inercia del sistema sea igual, el elipsoide correspondiente en el origen de referencia adoptado será una esfera y cualquier dirección será dirección principal.
- El elipsoide solo podrá degenerar en un cilindro cuando resulte nulo uno de los momentos principales de inercia, lo que indicaba que toda la masa del sistema estaría distribuida en la dirección de uno de los ejes (como era el caso de una varilla delgada) y, por tanto los otros dos momentos tendrían que ser iguales y el cilindro sería de revolución.

Estas conclusiones son válidas independientemente del punto O de referencia elegido, ya que, al igual que a cada punto del espacio le corresponde un tensor, le corresponderá asimismo un elipsoide para un mismo sistema material. En particular, si el punto adoptado se trata del **centro de gravedad**, el **elipsoide** correspondiente será el **mayor** de todos ya que los momentos de inercia respecto de ejes que pasen por él serán siempre -por Steiner- los menores para cada dirección. En tal caso se denominará **ELIPSOIDE CENTRAL DE INERCIA** independientemente de que los ejes en los que esté expresado sean o no los ejes principales del tensor central.

Sin embargo, éstos tendrán, a su vez, una particularidad adicional ya que podemos fácilmente comprobar que **los Ejes Principales Centrales son Principales en todos sus puntos**; es decir, sea cual sea el origen de referencia tomado si nos desplazamos a lo largo de una dirección principal.



En efecto, si x_2^o es uno de los ejes principales del elipsoide central entonces al menos será $I_{12}^o = I_{23}^o = 0$, por lo que, si desplazamos el triedro de referencia a lo largo de dicho eje hasta otro punto $O_2 \in x_2^o$, podremos escribir:

$$\begin{cases} x_{1i} = x_{1i}^o \\ x_{2i} = x_{2i}^o - GO_2 \\ x_{3i} = x_{3i}^o \end{cases} \Rightarrow$$

$$I_{12} = \sum m_i x_{1i} x_{2i} = \sum m_i x_{1i}^o (x_{2i}^o - GO_2) = I_{12}^o - GO_2 \sum m_i x_{1i}^o = I_{12}^o - GO_2 M x_{1G}^o = 0$$

y análogamente

$$I_{23} = \sum m_i x_{2i} x_{3i} = \sum m_i (x_{2i}^o - GO_2) x_{3i}^o = I_{23}^o - GO_2 \sum m_i x_{3i}^o = I_{23}^o - GO_2 M x_{3G}^o = 0$$

Figura 14.14

Como podemos observar en la figura, al desplazarnos por los ejes principales del elipsoide central, el semieje correspondiente no variará mientras que los ortogonales disminuirán al aumentar el momento de inercia correspondiente por la relación de Steiner. Eso quiere decir que encontraremos determinados puntos para los cuales el elipsoide será de revolución a excepción del eje respecto al cual el momento de inercia sea el menor (semieje mayor del elipsoide). A estos puntos se les denomina **ANTIFOCOS** del elipsoide central y obviamente en el caso general existirán 6, cuatro en el eje de momento máximo y dos en el de valor medio distribuidos simétricamente respecto al centro de gravedad.

14.7 ANALOGÍAS PARA SISTEMAS PLANOS.

Cuando estudiemos el movimiento plano de un sólido rígido o, en su momento, las deformaciones planas de los sólidos reales -entendidas como movimientos infinitesimales en espacios de tiempo más o menos dilatados- podríamos seguir trabajando con las expresiones del tensor de inercia obtenidas para un espacio tridimensional en el que uno de los ejes es perpendicular al de la sección plana estudiada, pero ello conlleva alguna simplificación que resultará de utilidad. Por ejemplo, tomando el eje oz perpendicular al papel, su intersección con éste será precisamente el origen O, por lo que podremos escribir la distancia al eje como la distancia a O de forma que:

$$I_z = \sum m_i d_i^2 = \sum m_i [x_i^2 + y_i^2] = \sum m_i x_i^2 + \sum m_i y_i^2 = I_y + I_x = I_o$$

o bien, sustituyendo $I_z = I_o$ directamente en la [14.15]: $I_o = \frac{I_x + I_y + I_o}{2}$ quedará:

$$I_o = I_x + I_y \quad [14.20]$$

Como estudiamos solamente una sección plana podemos considerar $z = 0$ y por tanto $I_{xz} = I_{yz} = 0$, quedando el tensor de inercia en la forma:

$$\begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} & 0 \\ -I_{yx} & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_x + I_y \end{vmatrix} \quad \text{o abreviadamente} \quad \begin{vmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{vmatrix} \quad [14.21]$$

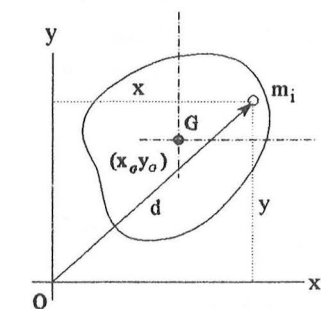


Figura 14.15

por el cual el momento de inercia respecto a una recta que pase por el origen y forme un ángulo α con ox será:

$$I_{\Delta} = \vec{u} \cdot \bar{I}_o \cdot \vec{u} = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

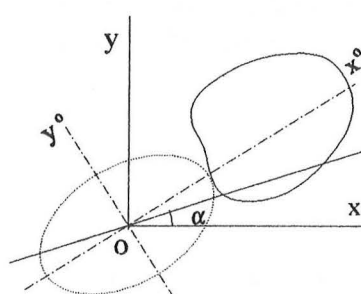


Figura 14.16

y el elipsoide de inercia, en su intersección con el plano xoy, nos dará la **ELIPSE DE INERCIA** acorde con la expresión abreviada del tensor:

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad [14.22]$$

que referida a los ejes principales con origen en O -obtenidos diagonalizando el tensor correspondiente- quedará:

$$I_x^o x'^2 + I_y^o y'^2 = 1 \quad [14.23]$$

El tensor y la elipse referidas a unos ejes con origen el centro de gravedad del sistema material, que se podrán obtener haciendo uso de los teoremas de Steiner, se denominarán igual que para un espacio tridimensional **TENSOR Y ELIPSE CENTRAL DE INERCIA**, cumpliéndose las propiedades indicadas para aquél que podemos resumir:

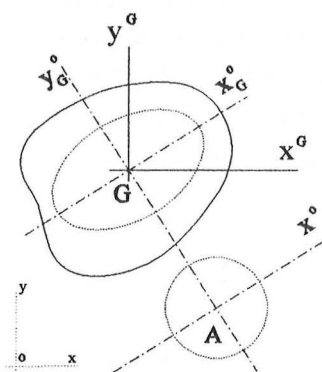


Figura 14.17

- ◇ Si los momentos principales ligados a un punto son iguales, $I_x^o = I_y^o$, la elipse de inercia será una circunferencia y todas las direcciones serán principales, pero no basta con ser $I_x = I_y$ respecto a unos ejes cualesquiera para afirmar que también lo es ya que se ha de anular necesariamente I_{xy} .
- ◇ Si uno de los ejes es de simetría se anulará el producto de inercia, independientemente del origen adoptado, y será por tanto **EJE PRINCIPAL Y CENTRAL**, ya que en él se encontrará el c.d.g.
- ◇ Los Ejes Principales Centrales serán Principales en todos sus puntos, encontrándose los Antifocos de la elipse central en el eje del radio menor y a una distancia AG y A'G del c.d.g. que deduciremos por Steiner igualando los momentos de inercia respecto a los ejes que pasen por A' y por A.

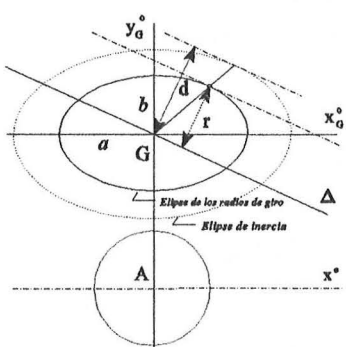


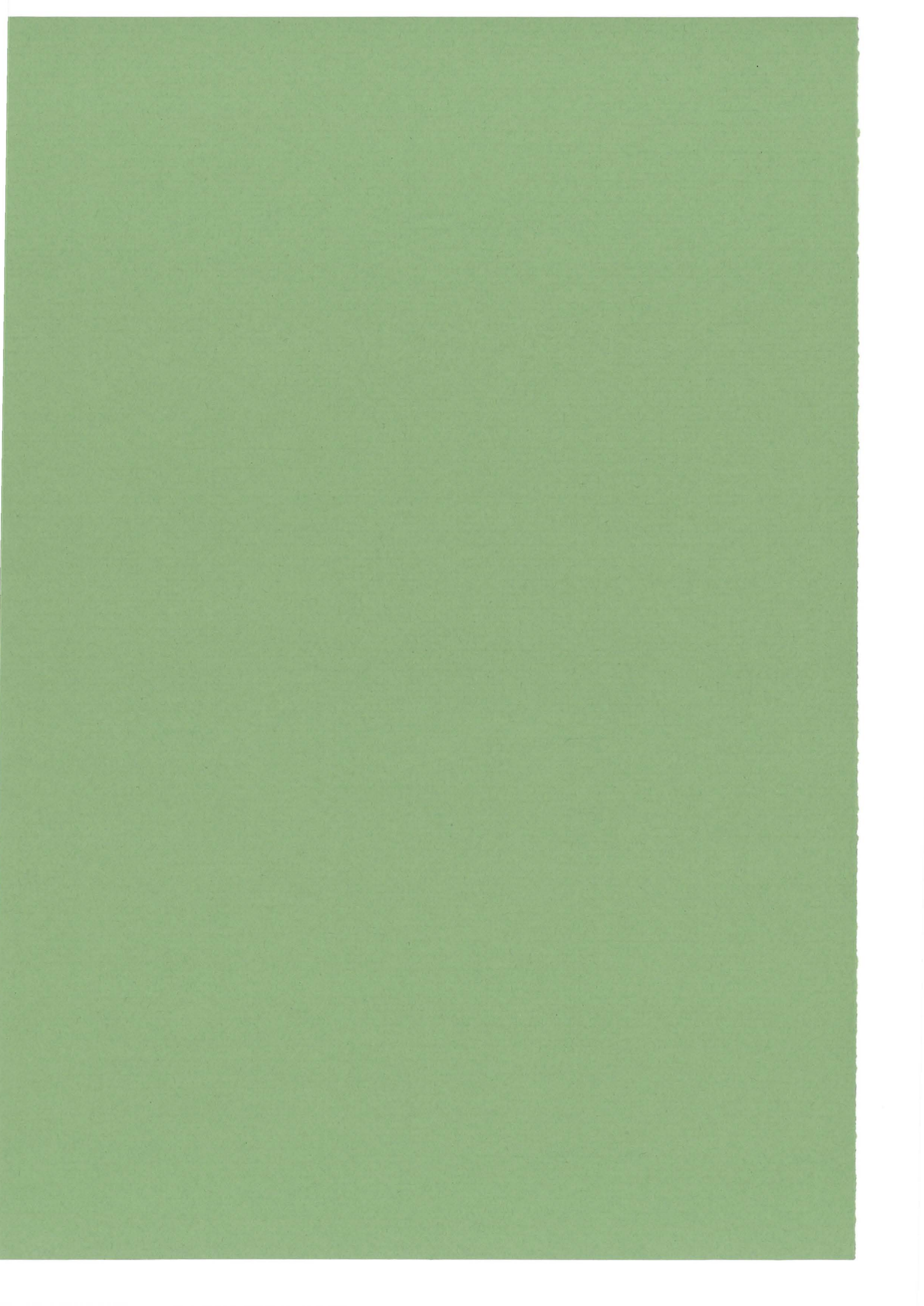
Figura 14.18

Aunque no la estudiaremos aquí, los Antifocos de la elipse central de inercia coincidirán con los de otra denominada **ELIPSE CENTRAL DE LOS RADIOS DE GIRO**, homotética de la anterior y construida en base a la definición de **Radio de giro** como la distancia a la que habría que colocar toda la masa del sistema, supuesta concentrada en G, para que proporcionara el mismo momento de inercia respecto a un eje que pasara por él

$$I_{\Delta} = \sum m_i r_i^2 = M r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{I_{\Delta}}{M}}$$

$$b = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \quad y \quad a = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \Rightarrow \frac{x^2}{I_x} + \frac{y^2}{I_y} = \frac{1}{M} \quad [14.24]$$

de forma que la envolvente de las paralelas a todas las direcciones trazadas a la distancia r del punto de referencia proporcionaría dicha elipse, cuya ventaja respecto a la elipse de inercia es que dimensionalmente no es simbólica como la que hemos estudiado, sino que r tiene dimensiones de longitud.



CUADERNO

24.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN

<http://www.aq.upm.es/ijh/apuntes.html>